

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



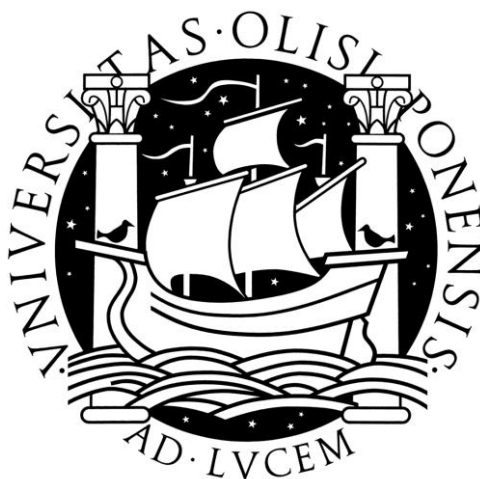
PROJECCÃO ESTEREOGRÁFICA
PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Alexandre Manuel Morais Mena e Silva

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

2011

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



PROJECCÃO ESTEREOGRÁFICA
PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Alexandre Manuel Morais Mena e Silva

Dissertação orientada pelo Prof. Doutor Henrique de Sousa Leitão

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

2011

AGRADECIMENTOS

Os meus sinceros agradecimentos ao Professor Doutor Henrique de Sousa Leitão pela sua total disponibilidade, pela força e motivação que sempre me transmitiu e principalmente pela forma alegre e gratuita com que transmite toda a sua imensa sabedoria. É uma sorte tê-lo como amigo.

Agradeço também à minha querida esposa Carla que esteve sempre ao meu lado durante esta aventura; aos meus filhos, Leonor e Diogo, que me inspiraram com os seus sorrisos maravilhosos e aos meus queridos pais pela alegria que me mimam e apoiam.

Gostava também de agradecer aos meus amigos Directores do Colégio de São Tomás: Pe. João, Isabel e Tiago, que me ajudam a crescer como professor e que me mantêm aceso o desejo de querer aprender sempre mais e mais.

Agradeço aos professores com quem tive oportunidade de trabalhar e que me ensinaram muito nestes dois últimos anos e aos meus colegas de mestrado pela amizade, partilha e boa disposição.

Obrigada Catarina pela ajuda com o Inglês.

RESUMO

Esta dissertação tem como objectivo estudar as propriedades da Projecção Estereográfica bem como as suas aplicações a outros ramos do conhecimento. Para tal, foi necessário referir alguns conceitos matemáticos da esfera e fazer uma pequena introdução à astronomia antes de definir Projecção Estereográfica e demonstrar algumas das suas principais propriedades.

A Projecção Estereográfica está estritamente relacionada com o Astrolábio logo, nesta dissertação, serão analisadas matematicamente algumas das partes deste instrumento secular.

Este trabalho pretende também mostrar como a projecção estereográfica se relaciona com outras áreas, a saber: astronomia, teoria dos números, geometria inversiva e cristalografia.

No final desta dissertação é apresentado um pequeno conjunto de actividades que visa exemplificar como se poderá usar a Projecção Estereográfica no ensino da Matemática. Estas actividades são para ser aplicadas em sala de aula a alunos do terceiro ciclo do ensino básico e a alunos do ensino secundário.

ABSTRACT

The main aim of this dissertation is to study the properties of Stereographic Projection and its applications to other branches of knowledge. Thus, it was necessary to refer some mathematical concepts about the sphere and to make a short introduction to astronomy before defining this type of Projection and demonstrating some of its main features.

Stereographic Projection is closely related to the Astrolabe so, some of the components of this century-old instrument will be thoroughly analysed in this paper.

This work also aims to show how Stereographic Projection is related to other areas like: astronomy, number theory, inversive geometry and crystallography.

At the end there is a small set of activities which intends to exemplify how Stereographic Projection can be used at school. These activities are meant to be used with in the classroom with both intermediate and advanced students.

PALAVRAS-CHAVES

Projecção Estereográfica; Esfera; Plano; Círculos máximos e menores; Conservação; Astrolábio; Ternos Pitagóricos; Geometria inversiva; Cristalografia.

KEY-WORDS

Stereographic Projection; Sphere; Plane; Great Circles and Small Circles; Conservation; Astrolabe; Pythagorean Triples; Inversive Geometry; Crystallography.

Índice

Introdução	10
1. Geometria da Esfera	13
<i>Definição 1 (círculo máximo).....</i>	<i>14</i>
<i>Definição 2 (hemisfério)</i>	<i>14</i>
<i>Definição 3 (círculos menores)</i>	<i>14</i>
<i>Definição 4 (amplitude de um arco de círculo máximo).....</i>	<i>15</i>
<i>Definição 5 (pontos antípodas)</i>	<i>15</i>
<i>Definição 6 (pólo)</i>	<i>15</i>
<i>Definição 7 (eixo)</i>	<i>16</i>
<i>Definição 8 (ângulo esférico).....</i>	<i>16</i>
<i>Definição 9 (triângulo esférico)</i>	<i>17</i>
2. A Esfera Celeste	19
<i>Definição 1 (esfera celeste)</i>	<i>19</i>
<i>Definição 2 (plano do horizonte).....</i>	<i>19</i>
<i>Definição 3 (horizonte de lugar).....</i>	<i>19</i>
<i>Definição 4 (zénite e nadir)</i>	<i>20</i>
<i>Definição 5 (pólo norte e pólo sul)</i>	<i>21</i>
<i>Definição 6 (equador celeste).....</i>	<i>21</i>
<i>Definição 7 (meridiano de lugar).....</i>	<i>21</i>
<i>Sistema Horizontal de Coordenadas</i>	<i>22</i>
<i>Definição 8 (altura)</i>	<i>22</i>
<i>Definição 9 (azimute)</i>	<i>22</i>
<i>Elíptica.....</i>	<i>23</i>
<i>Definição 10 (elíptica)</i>	<i>23</i>
<i>Definição 11 (equinócios e ponto vernal).....</i>	<i>24</i>
<i>Definição 12 (solstícios).....</i>	<i>24</i>
<i>Sistema Equatorial Absoluto de Coordenadas</i>	<i>26</i>

<i>Definição 13 (ascensão recta)</i>	26
<i>Definição 14 (declinação)</i>	27
<i>Sistema Equatorial Horário</i>	27
3. Projecção Estereográfica	29
<i>Definição de Projecção Estereográfica</i>	30
<i>Proposição 1.1</i>	35
<i>Demonstração</i>	36
<i>Proposição 1.2</i>	38
<i>Demonstração</i>	38
<i>Proposição 1.3</i>	40
<i>Demonstração</i>	41
<i>Proposição 1.4</i>	41
<i>Demonstração</i>	41
<i>Teorema 1.1</i>	41
<i>Demonstração</i>	42
<i>Teorema 1.2</i>	42
<i>Demonstração</i>	42
<i>Teorema 1.3</i>	45
<i>Demonstração</i>	45
<i>Teorema 1.4</i>	46
<i>Demonstração</i>	46
<i>Propriedade das secções cónicas:</i>	48
<i>Demonstração:</i>	48
<i>Teorema 2 (Enunciado geral dos teoremas 1)</i>	50
<i>Demonstração (geométrica)</i>	50
<i>Demonstração (algébrica)</i>	51
<i>Proposição 2.1</i>	53
<i>Demonstração</i>	53
<i>Proposição 2.2</i>	55
<i>Demonstração</i>	55
<i>Proposição 2.3</i>	57
<i>Demonstração</i>	57

<i>Proposição 2.4</i>	58
Demonstração	58
<i>Proposição 2.5</i>	58
Demonstração	58
<i>Proposição 2.6</i>	60
Demonstração	60
<i>Proposição 3</i>	61
Demonstração	61
<i>Proposição 4.1. “Através de rectas”</i>	62
Demonstração	62
<i>Proposição 4.2 “Através de círculos paralelos”</i>	63
Demonstração	63
<i>Proposição 4.3 “através de círculos máximo”</i>	63
Demonstração:	64
<i>Proposição 5</i>	65
Demonstração	65
<i>Teorema 3 (preservação dos ângulos)</i>	67
Demonstração	67
<i>Teorema 4 (demonstração alternativa do teorema 3)</i>	69
Demonstração	69
<i>Corolário 1</i>	69
Demonstração	70
<i>Corolário 2</i>	70
Demonstração	71
<i>Teorema 5 (equação fundamental do astrolábio)</i>	71
Demonstração	72
<i>Teorema 6 (metade do ângulo)</i>	73
Demonstração	73
4. Aplicações da Projecção Estereográfica	74
4.1. O astrolábio.....	74
4.2. Os Ternos Pitagóricos de Euclides	95
Proposição	96

Demonstração:	96
4.3. <i>Geometria Inversiva</i>	99
Definição	101
4.4. <i>Projecção Estereográfica em Cristalografia</i>	104
5. Bibliografia	107
APÊNDICE	109

Introdução

“Les mathématiques sont une science au sens classique – un ensemble organisé de connaissances, caractérisé par le choix de ses objets d'étude et de ses règles internes de formation et de validation des savoirs. Les sciences modernes de la nature – celles nées avec Galilée – se sont appuyées sur les mathématiques et ont cherché à formuler leurs lois dans le langage de celles-ci, mais les mathématiques ne sont ni une science moderne ni une science de la nature.”

“As matemáticas são uma ciência no sentido clássico – um conjunto organizado de conhecimentos, caracterizado pela escolha dos seus objectos de estudo e das suas regras internas de formação e validação dos saberes. As ciências naturais modernas – aquelas que nasceram com Galileu – basearam-se na Matemática e procuraram formular leis através desta linguagem, mas as matemáticas não são uma ciência moderna nem uma ciência natural.”

L'invisible en mathématiques

Par Laurent Lafforgue (Nanterre, jeudi 12 mars 2009)

Ser professor é uma profissão muito bela e gratificante. Transmitir o conhecimento às gerações mais novas é como colocar nas mãos dos jovens uma pequena semente que eles próprios terão que cuidar para que no futuro nasçam grandes árvores e dêem muitos frutos.

A Matemática é fascinante pelas suas regularidades, pelas relações surpreendentes entre áreas aparentemente distintas da Matemática, pela forma como ela se relaciona com os outros saberes, pelo prazer que é resolver com sucesso um problema.

A carreira de professor implica estudar durante toda a vida, os conhecimentos que adquiriu ao longo da sua licenciatura necessitam constantemente de ser actualizados e aprofundados. Um professor tem de estar plenamente seguro dos conhecimentos científicos que vai transmitir ao aluno.

Laurent Lafforgue é um conceituado matemático francês que nasceu no ano de 1966 e foi vencedor de uma Medalha Fields em 2002. A frase que serve de mote a esta

introdução procura, de uma forma muito resumida mas nada simplista, dizer o que é a Matemática. A Matemática tem uma linguagem própria, utiliza os seus próprios símbolos e está organizada de uma forma sequencial conferindo-lhe um carácter sólido e poderoso. O poder da Matemática consiste no facto de ela ser a linguagem utilizada pelas outras ciências, sem a qual estas não se poderiam desenvolver. Isto é fascinante, uma actividade mental puramente abstracta conseguir dar resposta a situações bem concretas da realidade física.

A astronomia é um belo exemplo de uma ciência que usa a Matemática para ajudar a conhecer o seu objecto de estudo. Desde sempre que o céu fascina o homem. O homem sempre procurou perceber os fenómenos celestes porque estes, de alguma forma, estão relacionados de uma forma implícita e explícita com a sua vida. Os dias e as noites, os meses, os anos, as estações do ano, a lua... influenciam directamente o dia-a-dia do homem mas, o conhecimento dos céus é mais do que isto, é o conhecimento do próprio Homem.

Fruto desta cumplicidade entre a astronomia e a matemática nasce um instrumento muito interessante e extremamente avançado para a sua época, o astrolábio. Para compreender o funcionamento de um astrolábio é necessário aprofundar um tema muito específico de geometria: a Projecção Estereográfica.

Esta dissertação é sobre a Projecção Estereográfica e explora as suas propriedades e principais aplicações a outras áreas do conhecimento. Permite também fornecer aos professores do ensino básico e secundário novas ideias e materiais a serem explorados em sala de aula.

Uma dissertação sobre a Projecção Estereográfica é também uma aposta ganha por se tratar de um assunto pouco explorado em língua portuguesa.

Como a projecção estereográfica consiste em projectar objectos de uma superfície esférica numa superfície plana, a primeira secção desta tese consiste em definir alguns conceitos matemáticos sobre a geometria da esfera sem os quais seria impossível trabalhar a projecção estereográfica propriamente dita. A destacar os conceitos de círculo máximo e círculo menor.

A segunda secção trata de definir alguns conceitos astronómicos que serão também constantemente usados ao longo do desenvolvimento desta teoria. É importante definir um sistema de coordenadas, diferente do sistema usado na

geometria euclidiana, que permita relacionar objectos da superfície esférica através de determinados ângulos. Saliente-se a importância dos conceitos de altura e declinação.

O terceiro capítulo desta tese consiste em desenvolver exaustivamente a teoria da Projecção Estereográfica. Esta assenta sobre duas propriedades fundamentais da Projecção Estereográfica. Círculos projectam-se segundo círculos e os ângulos entre objectos da superfície esférica ficam preservados com este tipo de projecção. Algumas demonstrações têm já alguns séculos de existência enquanto que outras são mais recentes por usarem conceitos matemáticos que só foram descobertos e estudados mais tarde. Outra preocupação deste capítulo é mostrar como se constroem e desenhavam rigorosamente as projecções dos objectos da superfície esférica, mais especificamente os círculos. A construção rigorosa de algumas das componentes do astrolábio depende disso mesmo.

De seguida são apresentadas algumas das aplicações da Projecção Estereográfica, dando maior relevo ao astrolábio. Nesta quarta secção percebe-se como a projecção estereográfica é decisiva na construção e funcionamento do astrolábio. É importante referir que nesta dissertação não se estuda exaustivamente o astrolábio, apenas é intenção mostrar que a projecção estereográfica tem uma aplicação bastante forte neste instrumento astronómico. Serão também dados outros exemplos de aplicação a outras áreas do conhecimento como: a geometria inversiva, a teoria dos números e a mineralogia.

Por fim, e não menos importante, são apresentados um conjunto de tarefas a serem aplicadas na sala de aula a alunos do ensino básico e secundários que visam consolidar os conhecimentos adquiridos pelos alunos e motivá-los para a aprendizagem da matemática.

1. Geometria da Esfera

A esfera é um sólido geométrico que pode ser definido de várias formas. Pode-se considerar a esfera como o lugar geométrico dos pontos (P) cuja distância a um ponto (C) fixo, chamado “centro da esfera”, é menor ou igual que um determinado valor r , denominado por “raio da esfera”. A esfera também se pode definir como o lugar geométrico que resulta da rotação de 180° de um círculo em torno de um diâmetro fixo.

Para definir analiticamente a esfera, considere-se $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da esfera, $C(c_1, c_2, c_3)$ o centro e r o raio ($r > 0$), então $\overline{PC} \leq r$, ou seja, $\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2} \leq r$. Como ambos os membros desta desigualdade são positivos, conclui-se que é equivalente a:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 \leq r^2$$

Os pontos P que satisfazem a condição $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$ definem uma superfície esférica de centro em C e raio r .

As equações paramétricas da esfera são as seguintes:

$$\begin{cases} x = c_1 + r \sin\theta \cos\varphi \\ y = c_2 + r \sin\theta \sin\varphi \\ z = c_3 + r \cos\theta \end{cases}$$

$\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo que $[CP]$ faz com a recta paralela ao eixo das cotas e que passa por C . $\varphi \in [0, 2\pi]$ é o ângulo entre o plano paralelo ao plano xOz que passa por C e o plano perpendicular ao plano xOy que passa por $[CP]$. Na figura 1.1 tem-se o caso particular em que o centro da esfera coincide com a origem do referencial.

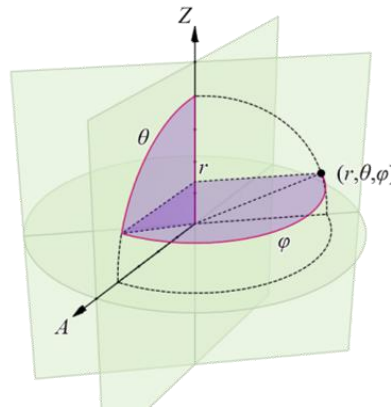


Figura 1.1 – Coordenadas polares da esfera

As definições que se seguem pretendem introduzir alguns conceitos relativos à esfera que serão usados com bastante frequência ao longo deste trabalho.

Definição 1 (círculo máximo)

O círculo que resulta da intersecção da esfera com um plano que passe pelo seu centro denomina-se por *círculo máximo* da esfera.

O nome de círculo máximo resulta do facto de este círculo ser o maior que se consegue desenhar na superfície de uma esfera.

Pode-se provar que um círculo máximo divide a esfera em duas partes geometricamente iguais, ou seja, em duas semi-esferas. Intuitivamente basta notar que o plano que gera esse círculo máximo, ao passar pelo centro da esfera, será o plano mediador de um dos diâmetros e por conseguinte a esfera será simétrica em relação ao referido plano.

Definição 2 (hemisfério)

Chamam-se *hemisférios* a cada uma das semi-esferas resultantes do círculo máximo.

Definição 3 (círculos menores)

Os círculos da superfície esférica que não sejam círculos máximos são denominados por *círculos menores*. Por outras palavras, os círculos que resultam da intersecção da esfera com um plano que não passe pelo centro, denominam-se por *círculos menores*.

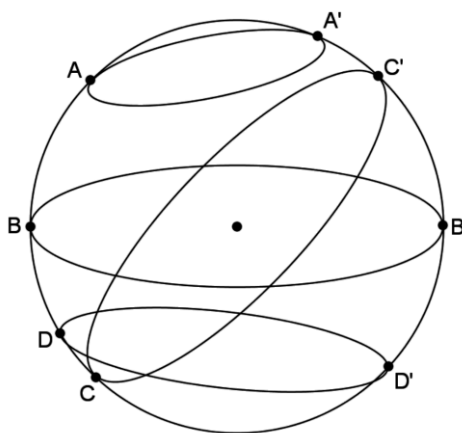


Figura 1.2 – Círculos máximos e menores

Na figura 1.2, pode-se observar que BB' e CC' são círculos máximos dado que os planos que os definem passam pelo centro da esfera. Por outro lado, AA' e DD' são círculos menores uma vez que o centro da esfera não pertence aos planos que os definem.

A definição seguinte visa estabelecer uma forma de medir a distância entre dois pontos de um círculo máximo, ou por outras palavras, medir a amplitude de um arco de círculo máximo.

Definição 4 (amplitude de um arco de círculo máximo)

A *amplitude de um arco de círculo máximo* é a medida do ângulo com vértice no centro da esfera e cujos lados são os raios da esfera que contêm as extremidades desse arco. Esta amplitude denomina-se por *distância esférica*.

Pela definição anterior podemos concluir que:

- A amplitude de um círculo completo é de 360° ;
- A amplitude de um semi-círculo máximo é de 180° ;
- A amplitude de um quadrante ou quarto de círculo é 90° .

Definição 5 (pontos antípodas)

Dois pontos de um círculo máximo que estejam diametralmente opostos, isto é, que estejam separados por uma distância esférica de 180° , são chamados de *pontos antípodas*.

Definição 6 (pólo)

Um ponto da superfície esférica que esteja a uma distância esférica de 90° em relação a um círculo máximo particular, dá-se o nome de *pólo* de um círculo máximo.

É importante destacar o facto de que cada círculo máximo possui exactamente dois pólos. Cada hemisfério tem o seu respectivo pólo

Definição 7 (eixo)

O *Eixo* de um círculo máximo é o diâmetro da esfera que contém os pólos desse círculo máximo.

Em relação à figura 1.3 podemos observar o seguinte:

- Os pontos P e P' são os pólos do círculo máximo CABD porque estão a uma distância esférica de 90° , ou seja, os arcos PA e PB têm uma amplitude de 90° ;
- Como [CD] é um diâmetro, a distância esférica entre os pontos C e D é de 180° . Assim sendo, os pontos C e D são antípodas um do outro;
- O arco AB tem uma distância esférica igual à amplitude do ângulo AOB.

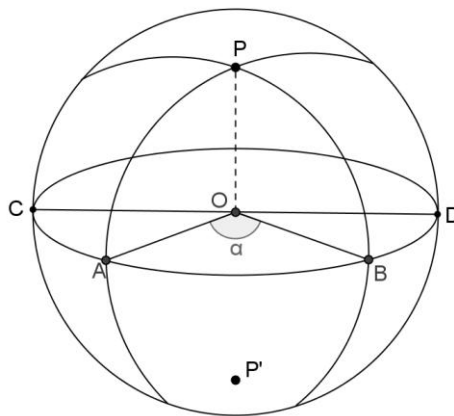


Figura 1.3 - Representação geométrica das definições 4 a 7

Definição 8 (ângulo esférico)

Chama-se *ângulo esférico* ao ângulo formado pela intersecção de dois círculos máximos. A sua amplitude é igual à do ângulo formado pelas tangentes aos dois círculos máximos no ponto de intersecção de ambos.

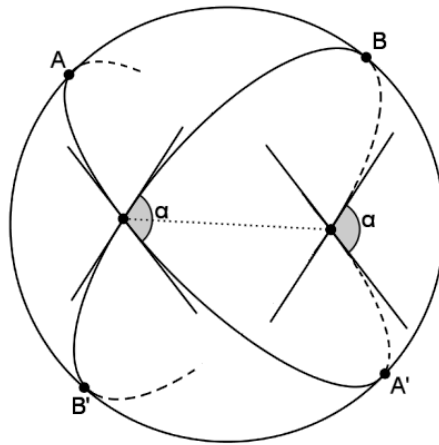


Figura 1.4 - Ângulo esférico

Como se pode observar pela figura 1.4, o ângulo entre os círculos máximos AA' e BB' desenhados é α porque é o ângulo formado pelas tangentes indicadas na figura.

Definição 9 (triângulo esférico)

Um triângulo esférico é formado na superfície esférica pela intersecção de três círculos máximos.

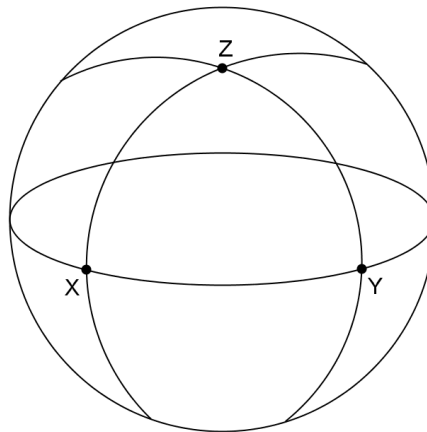


Figura 1.5 - Triângulo esférico

A figura 1.5 mostra-nos o triângulo esférico $[XYZ]$ formado pela intersecção dos círculos máximos XY , YZ e ZX .

Relativamente aos triângulos esféricos é necessário tecer algumas considerações:

- O maior valor que um ângulo pode tomar é 180° ;
- A soma dos ângulos internos está compreendida entre 180° e 540° ;
- Um triângulo esférico não pode ser maior que um hemisfério;
- A distância esférica de qualquer lado não ultrapassa os 180° .
- Ao maior lado opõe-se o maior ângulo e vice-versa;
- Se dois dos lados forem iguais no seu comprimento então os seus ângulos opostos também são iguais;
- Se os três lados forem iguais então os ângulos também o serão mas, não medem necessariamente 60° .
- É possível construir um triângulo com dois ou mais ângulos a medirem 90° .

2. A Esfera Celeste

Quando se observa o céu numa noite sem luar e num local longe da iluminação citadina consegue-se ver, sem recorrer a telescópios ou a binóculos, uma infinidade de estrelas. As estrelas estão a milhares de milhões de quilómetros de distância dando a noção, a quem as observa, que estão fixas num pano negro e imenso com a forma de uma esfera cujo centro é Terra.

Definição 1 (esfera celeste)

Denomina-se por *esfera celeste* a abóbada celeste que se observa no céu. Em qualquer posição do globo terrestre, ela tem a forma de uma esfera de raio indefinido e de centro na posição do observador. Todos os objectos celestes visíveis projectam-se na esfera celeste.

Ao observar-se uma paisagem de um local elevado ou quando se olha para o mar consegue-se vislumbrar a linha do horizonte, ou seja, uma linha imaginária que está à altura dos olhos e que separa a parte superior e inferior da visão. A partir da linha do horizonte deixa-se de conseguir ver terra dando início ao céu. O local onde o observador se encontra parece um plano que termina na linha do horizonte. Neste sentido, surgem as seguintes definições.

Definição 2 (plano do horizonte)

O *plano do horizonte* consiste num plano tangente à Terra onde o ponto de tangência é o local onde o observador se encontra.

Definição 3 (horizonte de lugar)

O plano do horizonte intersecta a esfera celeste num círculo máximo denominado por *horizonte de lugar*.

Definição 4 (zénite e nadir)

O ponto da esfera celeste que está verticalmente acima do plano do horizonte, ou seja, que está por cima do observador, é o *zénite* (Z_e). Na mesma direcção mas no sentido oposto, ou seja, o ponto da esfera celeste que está por baixo do observador, é o *nadir* (N_a).

Durante o dia, é através do sol que se definem os pontos cardeais. À noite, não havendo sol, estes são definidos a partir da estrela polar, situada na constelação da ursa menor. A estrela polar indica a direcção do Norte e, rodando a partir dessa direcção de 90° em 90° no sentido anti-horário, surge o Oeste (W), depois o Sul (S), o Este (E) e finalmente regressa-se ao Norte (N).

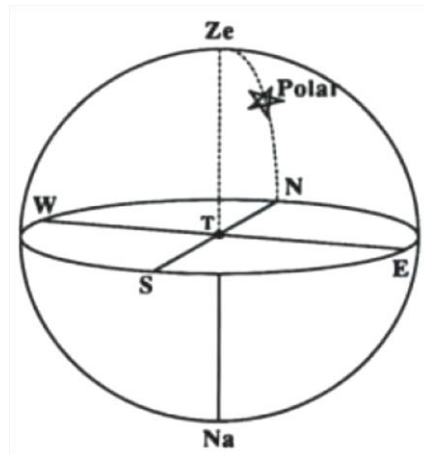


Figura 2.1 – Esfera Celeste

Na figura 2.1 está uma representação da esfera celeste. O ponto T é o centro da esfera e representa a Terra, o plano NWSE é o plano do horizonte e os pontos Z_e e N_a são o zénite e o nadir respectivamente. O ponto P (polar) é a estrela polar e os pontos N, W, S e E são os pontos cardeais Norte, Oeste, Sul e Este respectivamente.

A estrela polar é a única estrela que não se move no firmamento por estar na direcção do eixo da Terra, ou seja, se se prolongar o eixo de rotação da Terra este vai intersectar a esfera celeste na estrela Polar.

Definição 5 (pólo norte e pólo sul)

O ponto de intersecção do eixo da Terra com a esfera celeste que coincide com a estrela polar denomina-se por *pólo norte* celeste. O outro ponto de intersecção da esfera celeste com o eixo da Terra é o *pólo sul* celeste.

Os pólos norte e sul terrestres são os pólos do círculo máximo muito particular, o equador.

Definição 6 (equador celeste)

O *equador celeste* é o círculo máximo da esfera celeste que se obtém através da intersecção do plano definido pelo equador terrestre e a esfera celeste.

Definição 7 (meridiano de lugar)

O círculo máximo da esfera celeste que contem o pólo norte e o zénite tem o nome de *meridiano do lugar*.

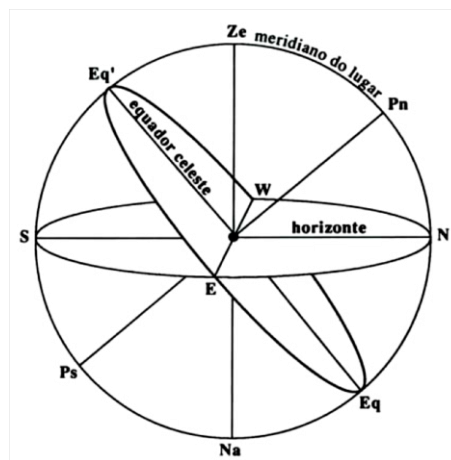


Figura 2.2 – Planos do horizonte e do equador

Na figura 2.2 está representado o horizonte de lugar (círculo NWSE) e o equador celeste (círculo E_qE_q'). Os pontos P_n e P_s são o pólo norte e o pólo sul celestes respectivamente e definem o eixo de rotação da Terra. O círculo máximo $P_nZ_eP_sNa$ é o meridiano do lugar.

Sistema Horizontal de Coordenadas

Para identificar um objecto na esfera celeste é necessário definir um sistema de coordenadas. Existem várias hipóteses para o fazer. Um dos mais utilizados por aqueles que observam os céus é o *Sistema Horizontal de Coordenadas*. Este é o mais natural por se basear em elementos directamente com a posição do observador.

Este sistema de coordenadas é composto pelo plano do horizonte (definido pela posição do observador) e pelo eixo perpendicular ao plano que passa pelo nadir e pelo zénite. A orientação deste eixo é no sentido nadir – zénite. A origem do sistema horizontal é o ponto cardeal Sul orientado no sentido da rotação dos ponteiros do relógio.

Com este sistema são necessários apenas dois ângulos, ou seja, duas coordenadas, para definir inequivocamente um ponto da esfera celeste. A primeira coordenada é a *altura* e a segunda denomina-se por *azimute*.

Definição 8 (altura)

Dado um ponto da esfera celeste, a *altura* é a amplitude do ângulo com origem no plano do horizonte e que mede, como o próprio nome indica, a altura a que o ponto dado está do plano do horizonte. Representa-se simbolicamente por *alt* e a sua amplitude varia entre os -90° e os $+90^\circ$.

Definição 9 (azimute)

Dado um ponto da esfera celeste, o azimute é a amplitude do ângulo com origem no ponto cardeal sul e que mede horizontalmente, a distância esférica entre o ponto dado o ponto cardeal sul. Representa-se simbolicamente por *Az* e a sua amplitude varia entre os 0° e os 360° .

A figura 2.3 ilustra o sistema horizontal de coordenadas onde estão bem patentes a altura (*Alt*) e o azimute (*Az*).

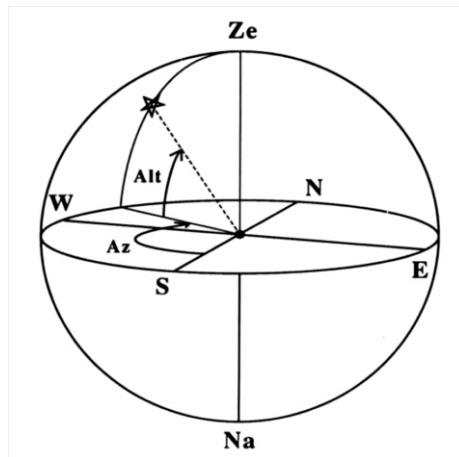


Figura 2.3 - Sistema horizontal de coordenadas

Elíptica

O movimento de rotação da Terra dá-nos a ilusão de que as estrelas, e em particular o sol, se movem no céu ao longo do dia. A única estrela que não se move é a estrela polar.

As posições relativas das estrelas não se alteram com o movimento aparente destas mas, se fosse possível observar o sol e as restantes estrelas simultaneamente, verificaríamos que o sol move-se por entre as restantes estrelas voltando a ocupar a mesma posição ao fim de um ano. Este movimento aparente do sol por entre as estrelas deve-se ao movimento de translação da Terra.

Assim, ao longo de um ano, a trajectória do sol descreve um círculo máximo sobre a esfera celeste com uma ligeira inclinação em relação ao equador celeste. Esta inclinação está relacionada com a inclinação do eixo da Terra.

Definição 10 (elíptica)

O círculo máximo celeste descrito pela trajectória do sol recebe o nome de *elíptica*.

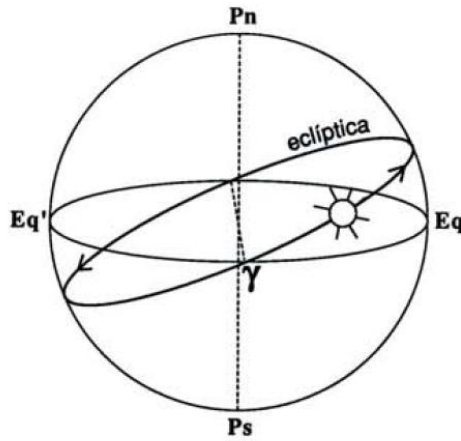


Figura 2.4 – A elíptica

A figura 2.4 mostra o sentido de rotação do sol e a inclinação que a elíptica tem em relação ao equador celeste. Como se pode observar, metade do ano o sol está acima do equador celeste (hemisfério norte) e na outra metade do ano está abaixo do equador celeste (hemisfério sul).

Definição 11 (equinócios e ponto vernal)

Os pontos de intersecção da elíptica com o equador celeste são os equinócios. O equinócio da primavera marca o início desta estação do ano no hemisfério norte e ocorre no dia 21 de Março. No equinócio da primavera, o sol passa do hemisfério sul para o hemisfério norte e ao ponto de intersecção da elíptica com o equador dá-se o nome de *ponto vernal* (γ).

Definição 12 (solstícios)

Os pontos da elíptica que se encontram mais afastados do equador celeste, ou seja, que estão a uma distância de 90° dos equinócios, chamam-se solstícios. O solstício de verão, que fica no hemisfério norte, marca o início desta estação de ano. O equinócio do Outono marca o início do Outono e no solstício de Inverno, que fica no hemisfério sul, principia o Inverno.

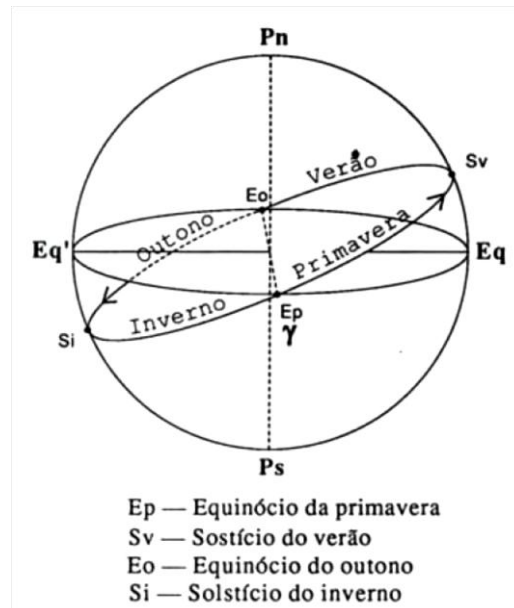


Figura 2.5 – Estações do ano

Observando a figura 2.5 podemos verificar que o sol roda no sentido anti-horário e intersecta o equador em dois pontos: o equinócio da Primavera e o equinócio de Outono. O primeiro obtém-se quando o sol viaja do hemisfério sul para o hemisfério norte e o segundo quando o sol viaja do hemisfério norte para o hemisfério sul.

Para definir um sistema de coordenadas alternativo ao sistema horizontal de coordenadas o solstício da primavera vai desempenhar uma função determinante, como se verificará mais à frente neste trabalho.

Se considerarmos uma tira à volta da elíptica com uma espessura de 16° , ou seja, 8° para norte e 8° para sul, verifica-se que, ao longo do ano, os planetas descrevem movimentos na esfera celeste mantendo-se sempre dentro desta tira. Esta tira tem o nome de Zodíaco. O Zodíaco está dividido em doze partes designadas por signos com 30° de comprimento cada uma.

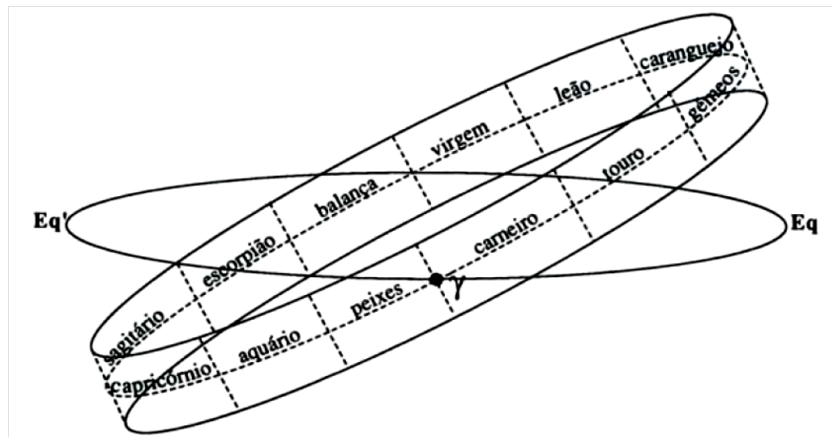


Figura 2.6 – Zodíaco

Sistema Equatorial Absoluto de Coordenadas

O sistema horizontal de coordenadas usa o plano do horizonte como referência e, sendo o plano do horizonte definido pelo local onde o observador se encontra, este sistema de coordenadas vai ter o inconveniente de depender da localização do observador. Ou seja, o zénite, o nadir, a altura de determinada estrela a determinada hora varia com a posição do observador.

Assim, surge a necessidade de conceber outro tipo de sistema de coordenadas que seja invariante como por exemplo, o sistema absoluto de coordenadas.

No sistema absoluto de coordenadas temos como referência o plano do equador e o eixo definido pelos pólos da esfera celeste. Neste sistema de coordenadas, cada ponto na esfera é definido através de duas coordenadas, a *ascensão recta* e a *declinação*.

Definição 13 (ascensão recta)

Dado um ponto da esfera celeste, a sua *ascensão recta* é a amplitude do ângulo que tem como origem o ponto vernal (γ) e mede, ao longo do plano do equador, a distância esférica entre a origem e o ponto dado. A *ascensão recta* é a primeira coordenada do sistema absoluto de coordenadas, representa-se por α e varia entre os 0° e os 360° .

Definição 14 (declinação)

Dado um ponto da esfera celeste, a sua *declinação* é a amplitude do ângulo que tem como origem o plano do equador celeste e mede verticalmente, a distância esférica entre a origem e o ponto dado. A declinação é a segunda coordenada do sistema absoluto de coordenadas, representa-se por δ , usa o sentido directo de P_s para P_n e varia entre os -90° e os 90° .

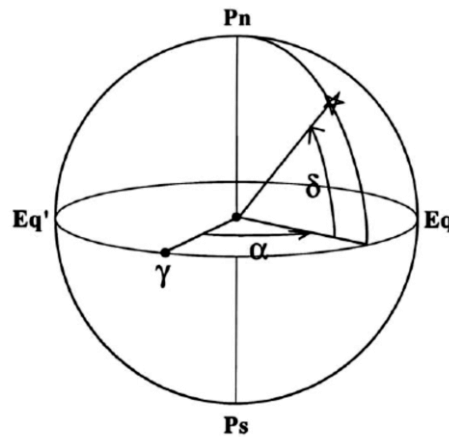


Figura 2.7 – Sistema absoluto de coordenadas

Sistema Equatorial Horário

Este sistema de coordenadas é parecido com o sistema equatorial absoluto de coordenadas apenas com uma ligeira diferença. Como referencial usa-se o plano equatorial e o eixo definido pelos pólos da esfera celeste, tal como acontecia no sistema absoluto de coordenadas. Cada ponto da esfera fica definido por duas coordenadas, a segunda volta a ser a declinação mas, na primeira coordenada, a ascensão recta é substituída pelo *ângulo horário* medido também sobre o equador. A origem da contagem do ângulo horário é o ponto de intersecção do meridiano do lugar, que contém o Zénite, com o equador. O ângulo horário é medido em graus e o sentido positivo é o sentido retrógrado. Esta coordenada mede o tempo que decorreu desde que um determinado ponto da esfera celeste passou pela origem, ou seja, pelo meridiano de lugar.

Ao ângulo horário do ponto vernal dá-se o nome de *tempo sideral*. A unidade de medida do tempo sideral é a hora, o minuto e o segundo e um dia de tempo sideral (24

horas siderais) equivale ao tempo que a esfera celeste demora a efectuar uma volta completa. Logo $360^\circ \div 24 = 15^\circ$, ou seja, um ângulo de 15° corresponde a uma hora sideral.

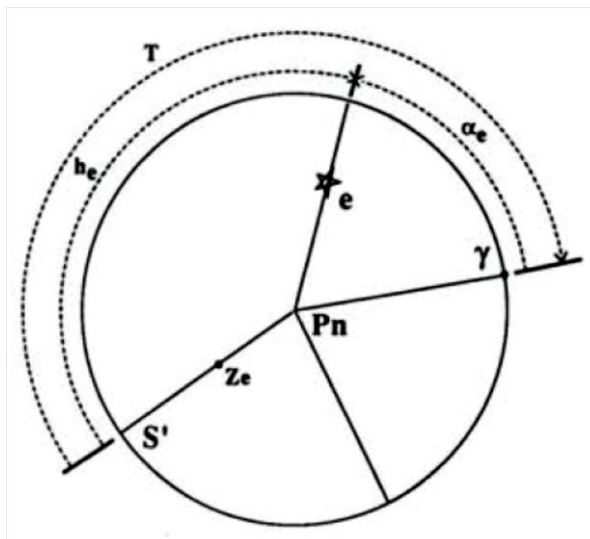


Figura 2.8 – Medição do tempo sideral de uma estrela

Observando a figura 2.8 temos e uma estrela qualquer e γ o ponto vernal a partir do qual se mede o ângulo da ascensão recta. P_n é o pólo norte em relação ao qual todas as estrelas da esfera celeste rodam em seu torno. Z_e é o zénite, que depende da localização do observador e o segmento $[S'P_n]$ representa o semi-meridiano do lugar. α_e e h_e são, respectivamente, a ascensão recta e o ângulo horário da estrela e .

Assim, a ascensão recta da estrela e , quando medida em horas, corresponde ao tempo sideral que decorre desde que o ponto vernal cruza o segmento $[S'P_n]$ até que a estrela cruze esse mesmo segmento de recta, ou seja, o meridiano de lugar. Por outras palavras, o tempo sideral (T), é igual à soma do ângulo horário da estrela e com a sua ascensão recta: $T = h_e + \alpha_e$.

O sistema equatorial horário não irá ser utilizado ao longo desta tese. Foi apenas referenciada a título de curiosidade.

3. Projecção Estereográfica

A projecção estereográfica é um método matemático que permite projectar objectos de uma superfície esférica, numa superfície plana de modo a que os ângulos entre os objectos da esfera sejam preservados quando projectados numa superfície plana. Este princípio parece ter sido do conhecimento de Hiparco em ca. 150 a.C. Hiparco foi um astrónomo e matemático grego da escola de Alexandria que nasceu em ca. 190 a.C. em Nicéia.

No entanto, foi Ptolomeu (ca. 85 d.C. – ca. 165 d.C.) que fez uma descrição pormenorizada da projecção estereográfica em ca. 140 d.C. no seu trabalho intitulado “The Planisphaerium”. Ptolomeu nasceu em Pelusium no Egipto e foi um astrónomo e matemático grego tendo também se interessado pela geografia e pela música. A sua grande obra intitula-se “Almagesto” que significa “o grande tratado” e é um trabalho sobre astronomia.



Figura 3.1 – Ptolomeu, uma gravura do séc. XVI

O nome “projecção estereográfica” não é do tempo de Ptolomeu tendo sido utilizado pela primeira vez por um Jesuíta chamado François d’Aguilon no início do séc. XVII. A palavra estereográfica deriva do grego e é a junção das palavras: sólido e desenho, ou seja, é a geometria que desenha sólidos (no plano).

Definição de Projectão Estereográfica

Para se definir uma Projectão Estereográfica é necessário um plano, que se irá chamar “plano da projectão”, e um ponto designado por origem da projectão. O plano da projectão será um plano definido por um círculo máximo da esfera e para origem da projectão escolhe-se um dos pólos desse círculo máximo. Sejam β e S o plano da projectão e o ponto da origem da projectão respectivamente.

Seja P um ponto da superfície esférica que se pretende projectar no plano, então, o ponto P' é a projectão estereográfica do ponto P se, P' for obtido fazendo a intersecção do plano β com o segmento de recta $[SP]$.

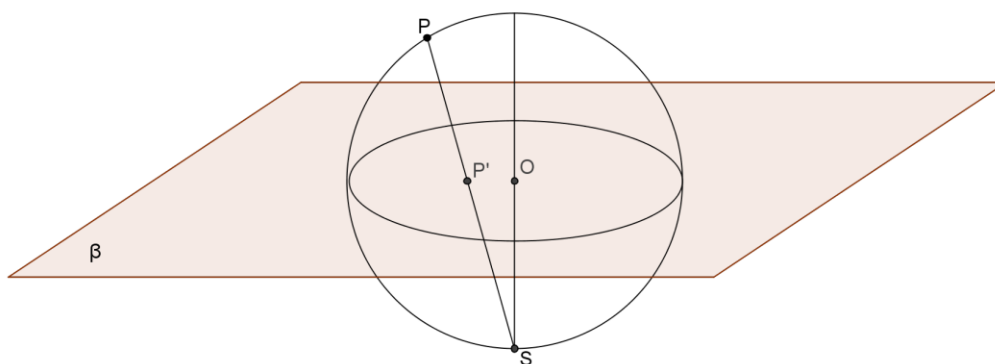


Figura 3.2 – Projectão estereográfica do ponto P

Para construir uma projectão estereográfica não é necessário que o plano da projectão seja definido por um círculo máximo ou que o ponto da projectão seja um dos pólos. O plano da projectão pode intersectar ou ser tangente à esfera desde que seja perpendicular ao eixo definido pelo ponto da projectão. No que respeita ao ponto da projectão, este pode ser um ponto qualquer do eixo, no entanto, o mais comum é escolher um dos pólos. O tratamento matemático da projectão estereográfica depende do plano e do ponto da projectão que se escolha mas, as propriedades básicas desta projectão permanecem invioláveis. Eis algumas possibilidades:

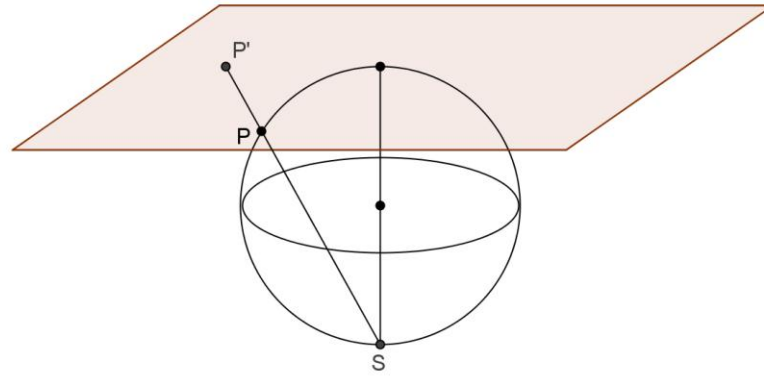


Figura 3.3 – Projeção estereográfica

Na figura 3.3 o ponto escolhido para a origem da projeção é o ponto S e o plano da projeção é tangente à esfera no pólo norte. P' é a projeção estereográfica do ponto P .

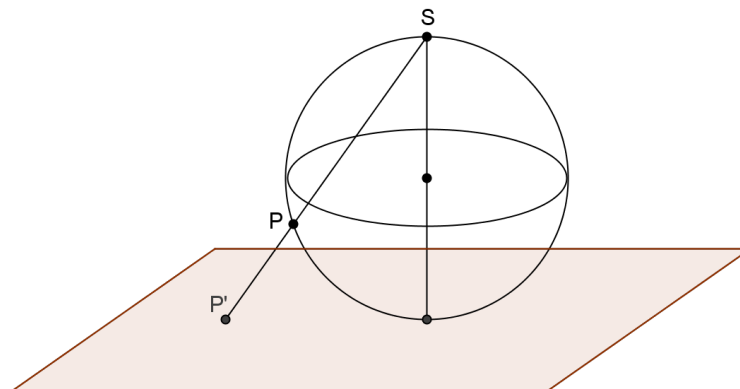


Figura 3.4 – Projeção estereográfica

Na figura 3.4 o plano da projeção é agora tangente à esfera no pólo sul e a origem da projeção é o ponto S , mais precisamente o pólo norte. O ponto P' é a projeção estereográfica de P .

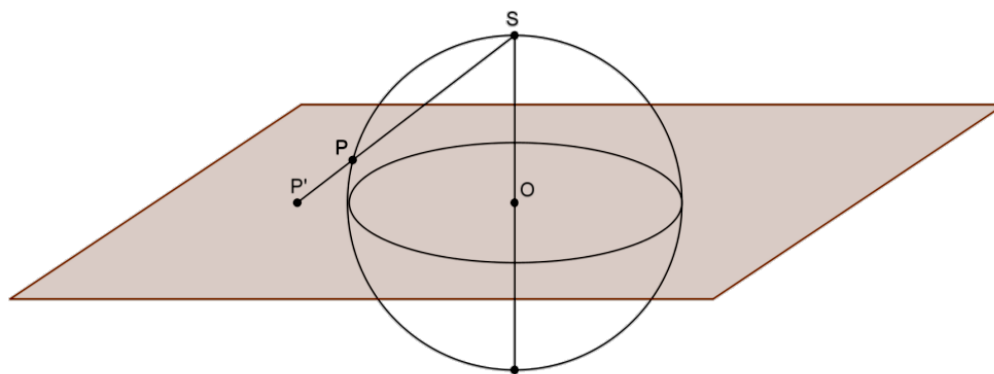


Figura 3.5

Na figura 3.5, o plano da projecção é o plano definido pelo círculo máximo e a origem da projecção é o pólo norte (S). O ponto P' é a projecção estereográfica do ponto P.

Este método de projectar pontos de uma superfície esférica no plano tem algumas vantagens em relação a outras projecções, nomeadamente:

- Círculos na superfície esférica são projectados como círculos ou como rectas no plano;
- Os ângulos entre objectos da superfície esférica são preservados quando esses mesmos objectos são projectados no plano.

Estas duas propriedades são fundamentais na astronomia uma vez que as posições dos objectos celestes são medidas através de ângulos entre círculos.

A primeira propriedade da projecção estereográfica desde sempre foi conhecida pelos matemáticos, no entanto, a segunda propriedade apenas foi conhecida e provada no renascimento por Thomas Hariot (1560-1621).

Outra grande vantagem da projecção estereográfica é o facto de as projecções poderem ser construídas com régua e compasso pois, todos os arcos de círculo são projectados como segmentos de recta ou como arcos de círculo.

De seguida, mostrar-se-ão alguns exemplos práticos das propriedades fundamentais desta projecção com o objectivo de introduzir intuitivamente o leitor a este método de projecção.

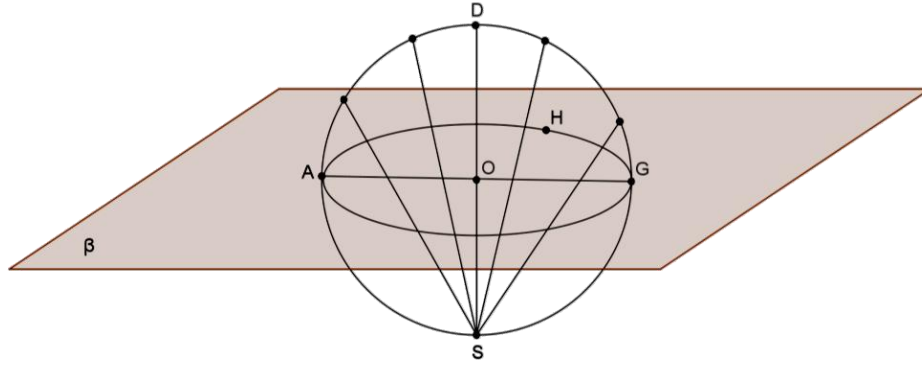


Figura 3.6 – Projectão estereográfica de um círculo máximo perpendicular ao plano da projectão

O círculo máximo AHG da figura 3.6 define o plano da projectão, o ponto S é a origem da projectão e ADGP é um círculo máximo perpendicular ao plano da projectão. Se desenharmos semi-rectas da projectão com origem em S até aos pontos do círculo máximo, a intersecção dessas semi-rectas com o plano da projectão é a recta AG. Esta recta é, portanto, a projectão do círculo máximo ADGP e, em particular, o ponto O, que é o centro do círculo AHG, é a projectão estereográfica de D.

Observando a figura 3.6. noutra perspectiva, podemos tirar mais algumas conclusões:

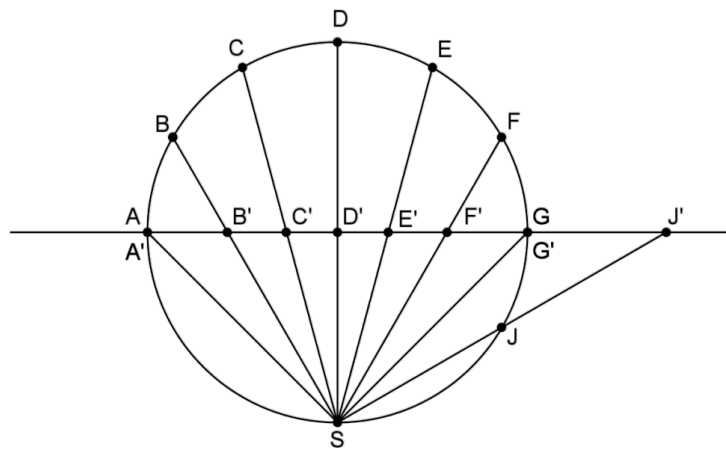


Figura 3.7

Na figura 3.7, S é a origem da projectão e a recta AG pertence ao plano da projectão, que deste ponto de vista estão sobrepostos. Os pontos A, B, C, D, E, F, G e J são pontos do círculo máximo perpendicular ao plano da projectão. Estes pontos estão a uma distância esférica de 30° uns dos outros e estão projectados nos pontos A', B', C', D', E', F', G', H' e J' respectivamente.

Intuitivamente pode-se observar que as projecções dos arcos AB, BC, \dots, GJ não são todas do mesmo comprimento, ou seja, $\overline{A'B'} > \overline{B'C'} > \overline{C'D'}$ e $\overline{A'B'} < \overline{G'J'}$, por exemplo.

Após uma análise rudimentar desta figura, conclui-se que arcos iguais do hemisfério norte da esfera localizados em círculos maiores perpendiculares ao plano da projecção, são projectados em segmentos de recta cada vez mais pequenos à medida que os arcos se aproximam do eixo (SD). Por outro lado, arcos iguais do hemisfério sul da esfera, localizados em círculos maiores perpendiculares ao plano da projecção, são projectados em segmentos de recta cada vez maiores à medida que os arcos se aproximam da origem da projecção.

As duas figuras seguintes, figura 3.8 e 3.9, representam a projecção estereográfica de um círculo menor e de um círculo maior respectivamente. Em ambas as situações, o ponto S é a origem da projecção, o círculo máximo BB' define o plano da projecção e o círculo CC' projecta-se estereograficamente no círculo DD' .

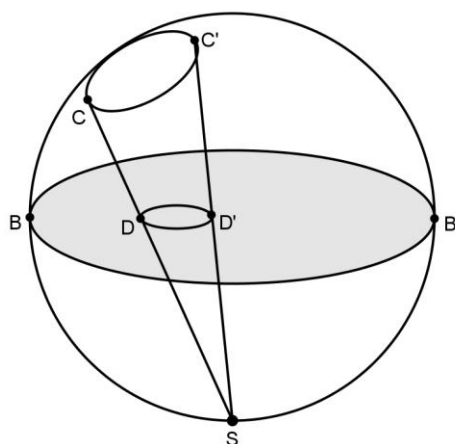


Figura 3.8 – Projectão estereográfica de um círculo menor

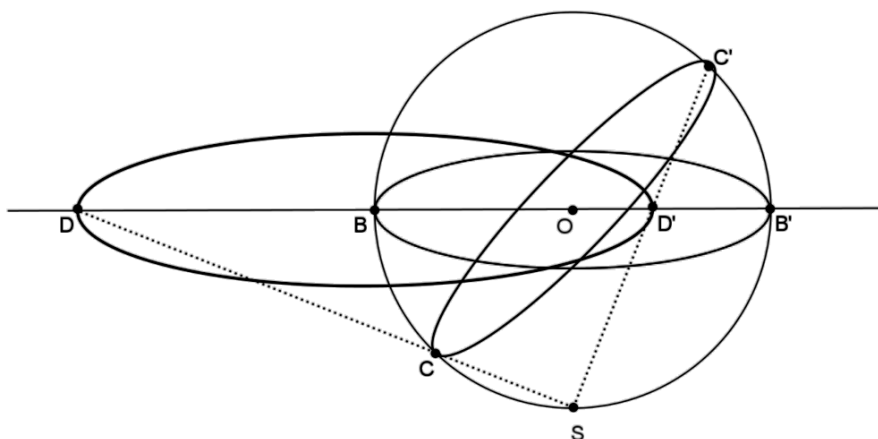


Figura 3.9 – Projectão estereográfica de um círculo máximo oblíquo ao plano da projecção

Depois de uma introdução intuitiva da projectção estereográfica proceder-se-á ao seu tratamento matemático. O primeiro conjunto de proposições visam definir, analiticamente, as coordenadas do ponto projectado a partir das coordenadas do ponto a reflectir e vice-versa. Como já foi referido anteriormente, existem várias possibilidades de escolha tanto para a origem da projectção como para o plano da projectção sem que esta escolha altere as propriedades da projectção estereográfica. Assim, nas proposições seguintes serão abordadas algumas das possibilidades mais comuns e que serão posteriormente utilizadas ao longo desta dissertação. Poderíamos fixar um método de projectção e desenvolver toda a teoria a partir dele mas, isto levantaria alguns problemas práticos: na maioria das demonstrações é necessário ter uma imagem auxiliar e por vezes é preferível mudar o plano e a origem da projectção para que estas imagens fiquem mais claras. Não fixar uma origem e um plano de projectção reforça também a ideia de que esta escolha não altera as propriedades fundamentais da projectção estereográfica e possibilita também ao leitor uma maior versatilidade na sua familiarização com este método de projectção. Outra razão para que todos os teoremas não usem a mesma origem e o mesmo plano da projectção reside no facto de as demonstrações presentes nesta dissertação respeitarem o fio condutor das demonstrações originais.

Proposição 1.1

Considere-se uma esfera de raio 1 e de centro na origem do referencial cartesiano de \mathbb{R}^3 . Tome-se o ponto $S(0, 0, -1)$ para origem da projectção e o plano $z = 0$ para plano da projectção. Sejam $P(a, b, c)$ as coordenadas de um ponto da esfera e $P'(A, B)$ as coordenadas da projectção estereográfica do ponto P no plano, então:

$$(1) \quad (A, B) = \left(\frac{a}{c+1}, \frac{b}{c+1} \right)$$

$$(2) \quad (a, b, c) = \left(\frac{2A}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{1 - A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + 1} \right)$$

Demonstração

O ponto (1) da proposição visa obter as coordenadas do ponto P' a partir das coordenadas do ponto P . Por seu lado, o ponto (2) consiste em obter as coordenadas de P a partir de P' .

Seja $P(a, b, c)$ um ponto da esfera unitária de centro na origem então, P satisfaz a condição: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Seja $S(0, 0, -1)$ a origem da projecção e $z = 0$ o plano da projecção.

A recta SP tem a seguinte equação vectorial:

$$SP: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y, z) = (0, 0, -1) + \mu(a, b, c + 1), \mu \in \mathbb{R}\}$$

Queremos encontrar o ponto P' que resulta intersecção da recta SP com o plano $z = 0$, então P' terá de coordenadas $(A, B, 0)$ em \mathbb{R}^3 ou (A, B) em \mathbb{R}^2 .

Determinando as equações paramétricas da recta SP , obtemos as seguintes equações:

$$(x, y, z) = (0, 0, -1) + \mu(a, b, c + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu a \\ y = \mu b \\ z = -1 + \mu(c + 1) \end{cases}$$

Como P' é um ponto que pertence à recta SP , podemos substituir as coordenadas de P' nas equações paramétricas de modo a se obter as coordenadas de P' em função das coordenadas de P .

$$P' \in SP \Leftrightarrow \begin{cases} A = \mu a \\ B = \mu b \\ 0 = -1 + \mu(c + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{c + 1} \\ B = \frac{b}{c + 1} \\ \mu = \frac{1}{c + 1} \end{cases}$$

Assim,

$$P' = (A, B) = \left(\frac{a}{c + 1}, \frac{b}{c + 1} \right)$$

Está assim demonstrada a primeira igualdade.

Na igualdade (2), queremos determinar o ponto $P(a, b, c)$ da esfera sabendo que a sua projecção é o ponto $P'(A, B, 0)$.

Seja a recta SP' com a seguinte equação vectorial:

$$SP' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (0, 0, -1) + \mu(A, B, 1), \mu \in \mathbb{R}\}$$

A equação cartesiana de SP' é a seguinte:

$$(x, y, z) = (0, 0, -1) + \mu(A, B, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu A \\ y = \mu B \\ z = -1 + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{x}{A} \\ \mu = \frac{y}{B} \\ \mu = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = z + 1$$

O ponto $P(a, b, c)$ satisfaz a condição $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e pertence à recta SP' logo:

$$\begin{cases} \frac{a}{A} = \frac{b}{B} \\ \frac{a}{A} = c + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{aB}{A} \\ c = \frac{a}{A} - 1 \\ a^2 + \left(\frac{aB}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A} - 1\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a^2 + \frac{a^2 B^2}{A^2} + \frac{a^2}{A^2} - \frac{2a}{A} + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a^2 A^2 + a^2 B^2 + a^2 - 2aA = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a(aA^2 + aB^2 + a - 2A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a = 0 \vee aA^2 + aB^2 + a - 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a = 0 \vee a(A^2 + B^2 + 1) = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{2AB}{A(A^2 + B^2 + 1)} \\ c = 0 \vee c = \frac{2A}{A(A^2 + B^2 + 1)} - 1 \\ a = 0 \vee a = \frac{2A}{A^2 + B^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 & \vee & b = \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1} \\ c = -1 & \vee & c = \frac{2 - (A^2 + B^2 + 1)}{(A^2 + B^2 + 1)} \\ a = 0 & \vee & a = \frac{2A}{A^2 + B^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 & \vee & b = \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1} \\ c = -1 & \vee & c = \frac{1 - A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + 1} \\ a = 0 & \vee & a = \frac{2A}{A^2 + B^2 + 1} \end{cases}$$

Logo:

$$P = (0, 0, -1) \text{ ou } P = (a, b, c) = \left(\frac{2A}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{1 - A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + 1} \right)$$

Está assim demonstrada a segunda igualdade.

c.q.d.

Proposição 1.2

Considere-se uma esfera de raio 1 e de centro na origem do referencial cartesiano de \mathbb{R}^3 . Tome-se o ponto $S(0, 0, 1)$ para origem da projecção e o plano $z = 0$ para plano da projecção. Sejam $P(a, b, c)$ as coordenadas de um ponto da esfera e $P'(A, B)$ as coordenadas da projecção estereográfica do ponto P no plano, então:

$$(1) \quad (A, B) = \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c} \right)$$

$$(2) \quad (a, b, c) = \left(\frac{2A}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{A^2 + B^2 - 1}{A^2 + B^2 + 1} \right)$$

Demonstração

Seja $P(a, b, c)$ um ponto da esfera unitária de centro na origem então, P satisfaz a condição: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Seja $S(0, 0, 1)$ a origem da projecção e $z = 0$ o plano da projecção.

A recta SP tem a seguinte equação vectorial:

$$SP: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \mu(a, b, c - 1), \mu \in \mathbb{R}\}$$

As equações paramétricas da recta SP :

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \mu(a, b, c - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu a \\ y = \mu b \\ z = 1 + \mu(c - 1) \end{cases}$$

$$P' \in SP \Leftrightarrow \begin{cases} A = \mu a \\ B = \mu b \\ 0 = 1 + \mu(c - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{1 - c} \\ B = \frac{b}{1 - c} \\ \mu = \frac{1}{1 - c} \end{cases}$$

Assim,

$$P' = (A, B) = \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c} \right)$$

Está assim demonstrada a primeira igualdade.

Seja a recta SP' com a seguinte equação vectorial:

$$SP' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + \mu(A, B, -1), \mu \in \mathbb{R}\}$$

A equação cartesiana de SP' é a seguinte:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \mu(A, B, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu A \\ y = \mu B \\ z = 1 - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{x}{A} \\ \mu = \frac{y}{B} \\ \mu = 1 - z \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = 1 - z$$

O ponto $P(a, b, c)$ satisfaz a condição $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e pertence à recta SP' logo:

$$\begin{cases} \frac{a}{A} = \frac{b}{B} \\ \frac{a}{A} = 1 - c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{aB}{A} \\ c = -\frac{a}{A} + 1 \\ a^2 + \left(\frac{aB}{A}\right)^2 + \left(-\frac{a}{A} + 1\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a^2 A^2 + a^2 B^2 + a^2 - 2aA = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a(aA^2 + aB^2 + a - 2A) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a = 0 \vee aA^2 + aB^2 + a - 2A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ a = 0 \vee a(A^2 + B^2 + 1) = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{2AB}{A(A^2 + B^2 + 1)} \\ c = 0 \vee c = \frac{-2A}{A(A^2 + B^2 + 1)} + 1 \Leftrightarrow \\ a = 0 \vee a = \frac{2A}{A^2 + B^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1} \\ c = -1 \vee c = \frac{-2 + (A^2 + B^2 + 1)}{(A^2 + B^2 + 1)} \\ a = 0 \vee a = \frac{2A}{A^2 + B^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \vee b = \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1} \\ c = -1 \vee c = \frac{-1 + A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + 1} \\ a = 0 \vee a = \frac{2A}{A^2 + B^2 + 1} \end{cases}$$

Logo:

$$P = (0, 0, -1) \text{ ou } P = (a, b, c) = \left(\frac{2A}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{A^2 + B^2 - 1}{A^2 + B^2 + 1} \right)$$

Está assim demonstrada a segunda igualdade.

c.q.d.

Proposição 1.3

Considere-se uma esfera de raio 1 e de centro na origem do referencial cartesiano de \mathbb{R}^3 . Tome-se o ponto $S(0, 0, -1)$ para origem da projecção e o plano $z = 1$ para plano da projecção. Sejam $P(a, b, c)$ as coordenadas de um ponto da esfera e $P'(A, B, 1)$ as coordenadas da projecção estereográfica do ponto P no plano, então:

$$(1) (A, B, 1) = \left(\frac{2a}{c+1}, \frac{2b}{c+1}, 1 \right)$$

$$(2) (a, b, c) = \left(\frac{4A}{A^2 + B^2 + 4}, \frac{4B}{A^2 + B^2 + 4}, \frac{4 - A^2 - B^2}{A^2 + B^2 + 4} \right)$$

Demonstração

Esta demonstração é análoga à da proposição 1.1.

c.q.d.

Proposição 1.4

Considere-se uma esfera de raio 1 e de centro na origem do referencial cartesiano de \mathbb{R}^3 . Tome-se o ponto $S(0, 0, 1)$ para origem da projecção e o plano $z = -1$ para plano da projecção. Sejam $P(a, b, c)$ as coordenadas de um ponto da esfera e $P'(A, B, -1)$ as coordenadas da projecção estereográfica do ponto P no plano, então:

$$(1) \quad (A, B, -1) = \left(\frac{2a}{1-c}, \frac{2b}{1-c}, -1 \right)$$

$$(2) \quad (a, b, c) = \left(\frac{4A}{A^2 + B^2 + 4}, \frac{4B}{A^2 + B^2 + 4}, \frac{A^2 + B^2 - 4}{A^2 + B^2 + 4} \right)$$

Demonstração

Esta demonstração é análoga à da proposição 1.2.

c.q.d.

O próximo conjunto de teoremas dizem respeito, quer à projecção de círculos máximos, quer à projecção de círculos menores. Dos quatro casos tratados, apenas num deles a projecção de um círculo não é um círculo mas sim uma recta.

Teorema 1.1

Círculos máximos e menores que passem pela origem da projecção são projectados segundo rectas.

Demonstração

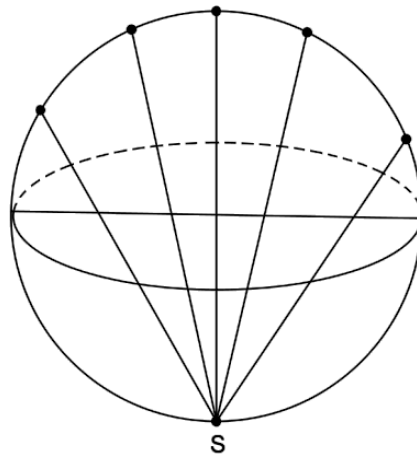


Figura 3.10 – Projectão de um círculo máximo que passa pela origem da projectão

A intersecção do plano da projectão com o plano definido por um círculo máximo ou menor que passe pela origem da projectão é uma recta que será a projectão estereográfica do círculo máximo dado.

Isto justifica-se pelo facto de todas as rectas que passam pela origem da projectão e por um ponto qualquer do círculo pertencerem ao plano definido por esse mesmo círculo e a intersecção de dois planos oblíquos ser sempre uma recta.

É de notar que o único ponto do círculo que não é projectado é a origem da projectão.

c.q.d.

Teorema 1.2

Círculos máximos que não passem pela origem da projectão, projectam-se como círculos.

Demonstração

Para demonstrar esta proposição vamos recorrer a duas proposições dos Elementos de Euclides, a proposição (VI:8) e (III:35).

A proposição (VI:8) diz o seguinte:

“ Caso em um triângulo rectângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo recto até à base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si.”

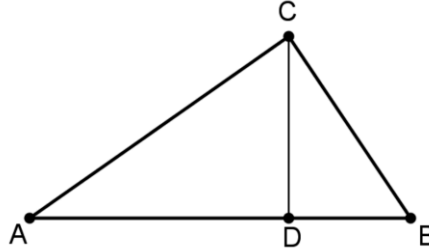


Figura 3.11 - $\Delta[ABC] \sim \Delta[ADC] \sim \Delta[BDC]$

A proposição (III:35) diz o seguinte:

“Caso, em um círculo, duas rectas se cortem, o rectângulo contido pelos segmentos de uma é igual ao rectângulo contido pelos segmentos da outra.” Por outras palavras, seja o círculo ABCD com duas cordas [AC] e [BD] que se intersectam no ponto E então, $\overline{AE} \times \overline{EC} = \overline{BE} \times \overline{ED}$.

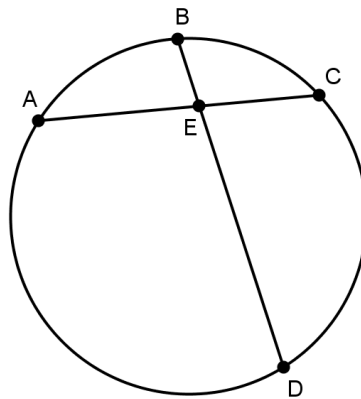


Figura 3.12 - $\overline{AE} \times \overline{EC} = \overline{BE} \times \overline{ED}$

Conhecidas as duas proposições que vão ser usadas na demonstração, vamos então provar que círculos máximos da esfera que não passem pelos pólos projectam-se como círculos.

Considere-se uma esfera AB e um círculo máximo HK da esfera. O ponto A é a origem da projecção, o ponto B é o antípoda de A e o plano da projecção é tangente à esfera no ponto B. Assim, os pontos M e N serão a projecção de H e K respectivamente.

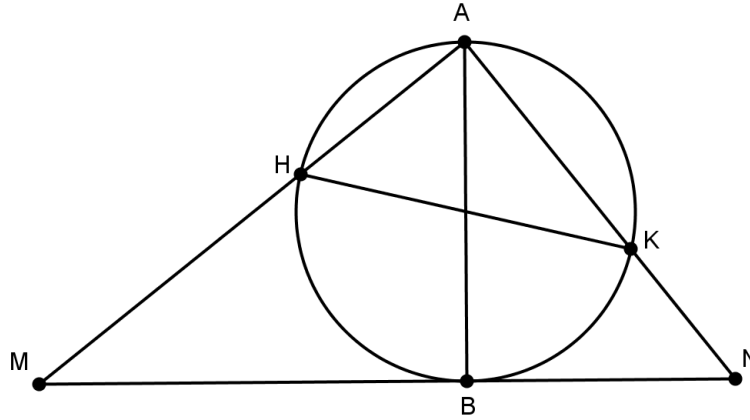


Figura 3.13 - Projecção de um círculo máximo que não passa pela origem

O triângulo [AHK] é rectângulo em A por se tratar de um ângulo inscrito numa semi-circunferência logo, o triângulo [AMN] também é rectângulo em A.

A recta AB é perpendicular a MN porque MN pertence ao plano da projecção que é tangente à esfera no ponto B e a recta AB é o eixo da esfera.

Pela proposição (VI:8) dos Elementos de Euclides os triângulos [MAB] e [ABN] são semelhantes logo:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}} \Leftrightarrow \overline{MB} \times \overline{BN} = \overline{AB}^2$$

Seja [H'K'] outro diâmetro do círculo máximo HK e [M'N'] a projecção de [H'K']. Temos que, pela proposição (VI:8) dos Elementos de Euclides, os triângulos [M'BA] e [ABN'] são semelhantes, ou seja,

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BN'}} \Leftrightarrow \overline{M'B} \times \overline{BN'} = \overline{AB}^2$$

$$\text{Assim } \overline{MB} \times \overline{BN} = \overline{M'B} \times \overline{BN'}.$$

Pela recíproca da preposição (III:35) podemos concluir que os pontos M, N, M' e N' estão inscritos numa circunferência.

c.q.d.

Esta demonstração não é completamente rigorosa. É verdade que as extremidades de qualquer par de segmentos que se intersectam estão inscritos numa circunferência mas, não é necessariamente verdade que as extremidades de um par de segmentos estejam na mesma circunferência que as extremidades de um segundo par.

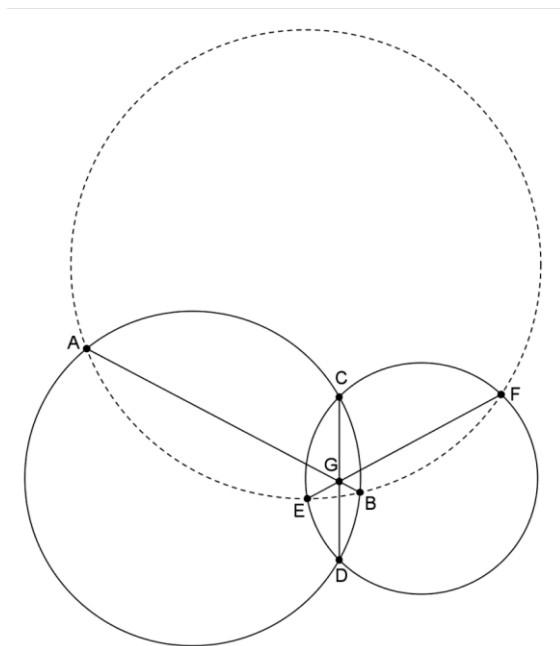


Figura 3.14 - $\overline{AG} \times \overline{GB} = \overline{CG} \times \overline{GD} = \overline{EG} \times \overline{GF}$

Por exemplo, na figura 3.14, $\overline{AG} \times \overline{GB} = \overline{CG} \times \overline{GD} = \overline{EG} \times \overline{GF}$ e os pontos A, D, B e C estão inscritos numa circunferência bem como os pontos C, E, D e F. No entanto, as circunferências não coincidem.

Esta demonstração é da autoria de um matemático do século XIII, Jordanus de Nemore e faz parte de um tratado de matemática sobre projectão estereográfica e o astrolábio intitulado “De plana Spera”.

Para completar esta demonstração é necessário utilizar as propriedades das secções cónicas que serão abordadas mais à frente neste trabalho.

Teorema 1.3

Círculos menores paralelos ao plano da projectão, projectam-se segundo círculos concêntricos no plano.

Demonstração

Para provarmos que círculos paralelos ao plano da projectão projectam-se segundo círculos concêntricos, vamos considerar a esfera AB, um círculo HK paralelo ao plano da projectão (plano do equador) de centro E e [AB] o eixo da esfera com a origem da projectão no ponto A. Sejam H', K' e B' as projecções de H e K e E respectivamente.

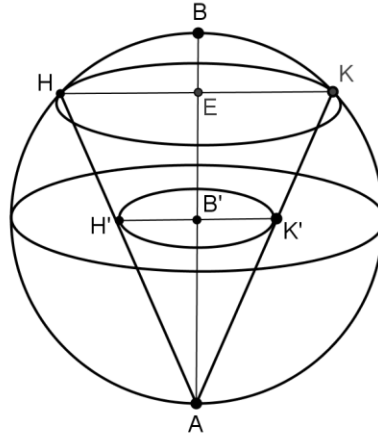


Figura 3.15 - Projectão de círculos paralelos ao plano da projecção

Pela construção sabemos que:

- $AB \perp HK$;
- $E \text{ e } B' \in [AB]$;
- $[HK]$ é um diâmetro;
- $\overline{HE} = \overline{EK}$;

Os triângulos $[HAE]$ e $[H'AB']$ são semelhantes e os triângulos $[AEK]$ e $[AB'K']$ também o são porque têm os ângulos iguais. Como $\overline{HE} = \overline{EK}$ então $\overline{H'B'} = \overline{B'K'}$.

Como estamos a considerar um diâmetro $[HK]$ qualquer, então todos os pontos H' e K' que resultam da projecção são equidistantes ao ponto B' logo, definem uma circunferência de centro em B' . Repare-se que para cada círculo HK paralelo ao plano da projecção, a sua projecção (que é um círculo) está sempre centrada em B' que está fixo.

c.q.d.

Teorema 1.4

Todos os círculos menores que não são paralelos ao plano do equador projectam-se como círculos.

Demonstração

Queremos provar que todos os círculos menores que não são paralelos ao equador projectam-se também segundo círculos.

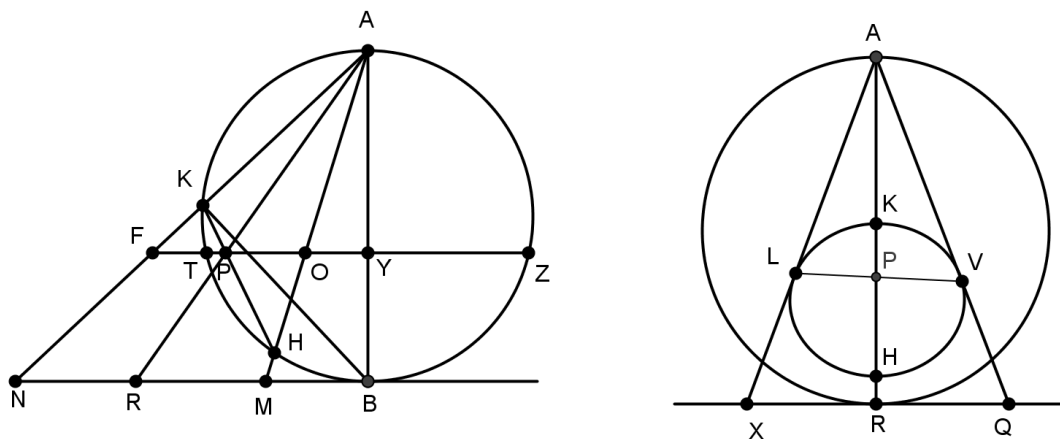


Figura 3.16 – Projecção de círculos menores

Para tal vamos definir uma esfera AB onde o ponto A é a origem da projecção e o plano da projecção é tangente à esfera no ponto B. Seja também, KH um círculo menor da superfície esférica com diâmetro [KH]. Vamos fazer passar um plano TYZ (ver figura da esquerda) paralelo ao plano da projecção que intersecte o círculo KH nos pontos L e V respectivamente originando a recta LPV que é perpendicular a AB (ver figura da direita). O plano ABK bissecta o segmento de recta LV no ponto P, ou seja $\overline{LP} = \overline{PV}$ (ver figura da direita). Desenhe-se também as rectas AKN, AHM e KB e estenda-se o segmento de recta [TZ] ao ponto F.

Quando se desenharm as linhas ALX, APR e AVQ (figura da direita), a recta XRQ resultante é paralela à recta LPV e está contida no plano da projecção. Os ângulos AKB e FYA são rectos e o ângulo FAB é comum aos triângulos [AKB] e [AFY] logo os ângulos AFY e KBA são iguais. Os ângulos KBA e KHA também são iguais por estarem inscritos no mesmo arco de circunferência.

Considere-se também o ponto O que resulta da intersecção da recta AH com a recta YP. Os triângulos [FPK] e [PHO] são semelhantes por terem os ângulos iguais, assim,

$$\frac{\overline{KP}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} \Leftrightarrow \overline{KP} \times \overline{PH} = \overline{PO} \times \overline{PF} = \overline{LP} \times \overline{PV}$$

(esta última igualdade deve-se à proposição (III:35) dos Elementos de Euclides pelo facto de [LV] e [KH] serem cordas do círculo KH e intersectarem-se no ponto P proposição)

Pela recíproca da proposição (III:35) dos Elementos de Euclides, podemos concluir que os pontos F, O, L e V estão inscritos numa circunferência. Devido ao

paralelismo entre o plano de projecção e o plano FPYZ, podemos concluir que os pontos N, X, M e Q também estão inscritos numa circunferência que era o que pretendíamos demonstrar.

c.q.d.

De seguida apresenta-se uma demonstração alternativa mas mais geral para os Teoremas anteriores. Esta demonstração recorre às propriedades do cone, mais precisamente à seguinte propriedade:

Propriedade das secções cónicas:

Dado um cone circular oblíquo, há duas formas de o seccionar e obter secções circulares. A primeira forma é fazê-lo através de planos paralelos à base do cone. A segunda alternativa é seccionar o cone através de planos com inclinação igual ao ângulo oblíquo da base.

Demonstração:

A figura seguinte 3.17 representa a secção do cone perpendicular à base e que contem o vértice.

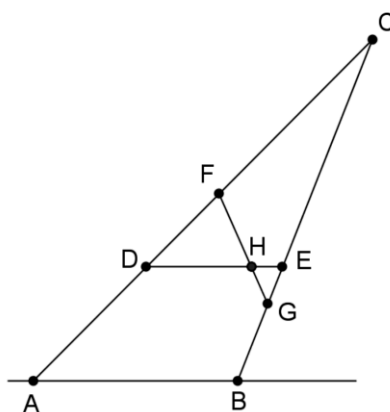


Figura 3.17 – Propriedade das secções cónicas

Vamos supor que DE e FG são planos que seccionam o cone da seguinte forma:

- o plano DE é paralelo à base do cone;
- os ângulos CAB, CDE e FGC têm igual amplitude;
- os ângulos ABC, DEC e CFG têm a mesma amplitude;

Como DE é paralelo à base do cone, gera secções circulares pela própria definição de cone. Resta provar que o plano FG, que é perpendicular ao plano ABC, gera secções circulares.

Seja P um ponto sobre a secção gerada pelo plano FG (figura 3.18 direita) de modo a que $[PH] \perp [FG]$ e que H também pertença a $[DE]$, onde $[DE]$ é um diâmetro do círculo paralelo à base (figura 3.18 esquerda).

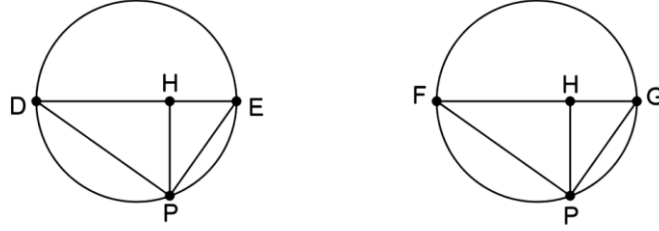


Figura 3.18 – Propriedade das secções cónicas

O triângulo $[DEP]$ é rectângulo em P porque o ponto P está sobre uma circunferência de diâmetro $[DE]$. $[PH] \perp [DE]$ pois, por hipótese, $[PH] \perp [FG]$ ($[DE]$ e $[FG]$ pertencem ao mesmo plano).

$$\overline{DE}^2 = (\overline{DH} + \overline{HE})^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HE}^2 + 2\overline{DH} \cdot \overline{HE}$$

Por outro lado,

$$\overline{PE}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{HP}^2$$

$$\overline{PD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HP}^2.$$

Como

$$\overline{DE}^2 = \overline{PE}^2 + \overline{PD}^2$$

então:

$$\overline{HE}^2 + \overline{HP}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HE}^2 + 2\overline{DH} \cdot \overline{HE} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{HP}^2 = 2\overline{DH} \cdot \overline{HE} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{HP}^2 = \overline{DH} \cdot \overline{HE}$$

Os triângulos $[GHE]$ e $[DHF]$ são semelhantes porque, por hipótese, os ângulos internos são iguais portanto, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\frac{\overline{HE}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{DH}} \Leftrightarrow \overline{DH} \times \overline{HE} = \overline{HG} \times \overline{FH} = \overline{HP}^2$$

Assim, o $\Delta[FPG]$ é rectângulo e $[PF] \perp [PG]$ logo, P pertence a uma circunferência de diâmetro $[FG]$.

c.q.d.

Teorema 2 (Enunciado geral dos teoremas 1)

A projecção estereográfica conserva os círculos, ou seja, os círculos da superfície esférica são projectados no plano como círculos.

Demonstração (geométrica)

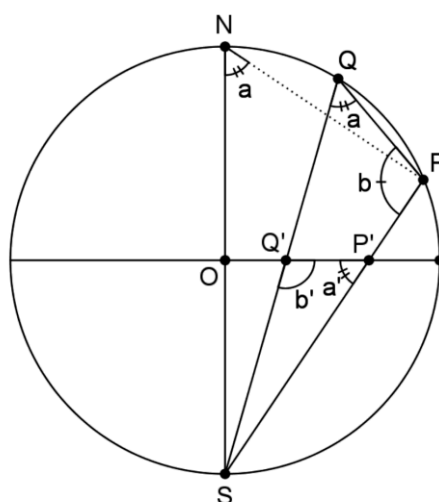


Figura 3.19- O círculo QP projecta-se no círculo Q'P'

Dada a figura 3.19, queremos provar que se QP é um círculo da superfície esférica então a sua projecção estereográfica, Q'P', também é um círculo.

Seja S a origem da projecção, OQ'P' o plano da projecção e [SQP] um cone circular oblíquo. O objectivo é provar que o plano da projecção está nas condições da propriedade anterior, originando assim, uma secção circular. Deste modo, basta demonstrar que $\hat{a} = \hat{a}'$ e $\hat{b} = \hat{b}'$.

$\widehat{SNP} = \widehat{SQP}$ porque são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência SP.

$\angle SPN$ é recto porque é um ângulo inscrito numa semi-circunferência logo, $\widehat{NSP} = 90 - \hat{a}$.

Como $NS \perp OP'$, o triângulo $[SOP']$ é recto logo, os triângulos $[SNP]$ e $[SOP']$ são semelhantes por terem dois ângulos iguais, ambos são rectângulos e o $\sphericalangle NSP$ é comum aos dois triângulos. Assim, $S\hat{P}'O = S\hat{N}P = S\hat{Q}P$, ou seja, $\hat{a} = \hat{a}'$.

Os triângulos $[SQP]$ e $[SQ'P']$ são semelhantes porque têm dois ângulos iguais: o $\sphericalangle QSP$ é comum aos dois triângulos e já se demonstrou que $\hat{a} = \hat{a}'$. Assim $\hat{b} = \hat{b}'$.

c.q.d.

Demonstração (algébrica)

Vamos considerar, para esta demonstração, uma esfera de centro na origem e raio 1, ou seja, a esfera de equação $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

O plano de equação $Z = 0$ é o plano da projecção e o Ponto $S(0, 0, -1)$ é a origem da projecção.

Considere-se também, um plano de equação $aX + bY + cZ + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se o ponto $P(X, Y, Z)$ pertencer à superfície esférica então a sua projecção estereográfica será um ponto da seguinte forma $P'(x, y, 0)$.

Uma equação da recta que passa pelos pontos S, P' e P poderá ser:

$$P = S + \mu(P' - S), \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P - S = \mu(P' - S)$$

Substituindo os pontos pelas respectivas coordenadas na equação anterior obtemos:

$$(X, Y, Z) - (0, 0, -1) = \mu[(x, y, 0) - (0, 0, -1)] \Leftrightarrow (X, Y, Z + 1) = \mu(x, y, 1)$$

As equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} X = \mu x \\ Y = \mu y \\ Z + 1 = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \mu x \\ Y = \mu y \\ Z = \mu - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Um círculo na esfera resulta da intersecção de um plano com a respectiva esfera logo, seja $\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \\ aX + bY + cZ + d = 0 \end{cases}$ a equação de um círculo pertencente à superfície esférica.

Simplificando o sistema anterior de modo a obter apenas uma equação tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \\ aX + bY + cZ + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \\ aX + bY + cZ + d + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 = aX + bY + cZ + d + 1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 - aX - bY - cZ + d' = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

com $d' = -d - 1$.

Substituindo a equação (1) na equação (2) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & (\mu x)^2 + (\mu y)^2 + (\mu - 1)^2 - a\mu x - b\mu y - c(\mu - 1) + d' = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \mu^2 x^2 + \mu^2 y^2 + (\mu - 1)^2 - a\mu x - b\mu y - c(\mu - 1) + d' = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{a}{\mu}x - \frac{b}{\mu}y + \frac{(\mu - 1)^2 - c(\mu - 1) + d'}{\mu^2} = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

f, g e h são constantes onde:

$$f = -\frac{a}{\mu}, g = -\frac{b}{\mu}, \text{ e } h = \frac{(\mu - 1)^2 - c(\mu - 1) + d'}{\mu^2}$$

A equação (3) é uma equação de uma circunferência contida no plano $Z = 0$. Logo podemos concluir que o círculo da esfera (2) projectou-se estereograficamente num círculo do plano da projecção (3).

c.q.d.

Este segundo conjunto de proposições visa descrever a posição correcta dos círculos projectados no plano, ou seja, como desenhar correctamente a projecção estereográfica de círculos da superfície esférica.

Proposição 2.1

Dada a projecção do círculo máximo que define o plano da projecção (equador), como desenhar no plano da projecção, um círculo da esfera paralelo a este?

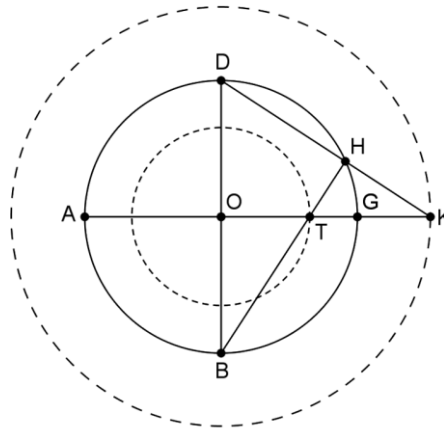


Figura 3.20 – Projectão de um círculo paralelo ao plano da projecção

Constrói-se a projecção do círculo máximo paralelo ao plano da projecção (equador) e dois diâmetros perpendiculares, ou seja, o círculo ABGD de centro em O e os diâmetros [AG] e [BD].

Sobre o círculo ABGD, desenha-se um arco com origem no ponto G, por exemplo, e com a mesma declinação que o círculo que pretendemos projectar. Definimos o ponto H como o outro extremo desse arco. De seguida, constroem-se as rectas DH e BH e marcam-se os pontos de intersecção destas com a recta AG. Um dos pontos ficará fora e o outro ficará dentro do círculo ABGD. Seja K o ponto exterior ao círculo e T o ponto interior ao círculo.

Se, o círculo paralelo ao equador que se pretende projectar, estiver no hemisfério sul então, o segmento [OT] será o raio do círculo que procuramos, caso contrário, se o paralelo estiver no hemisfério norte então, o segmento [OK], será o raio do círculo pretendido.

Demonstração

Sejam o círculo ABGD de centro E a projecção do equador e os segmentos [AG] e [BD] dois dos seus diâmetros perpendiculares entre si.

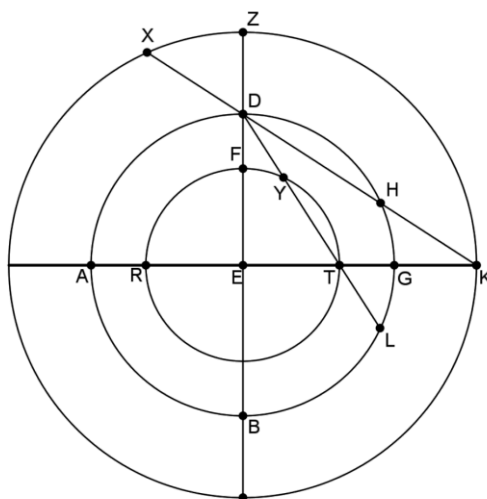


Figura 3.21 – Projecção de um círculo paralelo ao equador

Queremos desenhar um círculo paralelo ao equador (com o mesmo centro) dado a sua declinação. Assim, consideremos a partir de G e na direcção de D, um arco de circunferência com amplitude igual à declinação do paralelo. Seja ele o arco GH.

Seguidamente desenha-se a recta DH e o ponto K na intersecção da recta DH com a recta AG. Se o paralelo está acima do equador este será representado pelo círculo XK de raio [EK] e centro E.

Se, por outro lado, o paralelo está abaixo do equador, o arco da declinação será o arco GL (em direcção ao ponto B), encontra-se o ponto de intersecção das rectas DL e AG, chamado T, e o paralelo será construído com centro em E e raio [ET]

A figura 3.22. representa o mesmo problema noutra perspectiva.

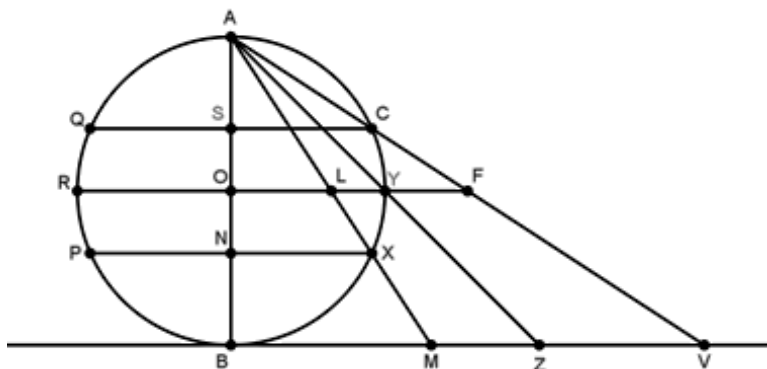


Figura 3.22 – Projecção de um círculo paralelo ao equador

Assim, A e B são os pólos da esfera, BV é o plano da projecção, [RY] é o diâmetro do equador, o segmento [QC] é o diâmetro do paralelo acima do equador e o segmento

[PX] é o diâmetro do paralelo abaixo do equador. Note-se que estes dois paralelos têm a mesma declinação. As rectas AC e RY intersectam-se em F e as rectas AY e AX intersectam-se com a recta BV nos pontos Z e M respectivamente.

$\overline{OY} = \overline{OA} \Rightarrow \overline{BZ} = \overline{BA}$ porque os triângulos [AOY] e [ABZ] são semelhantes.

Se [BZ] na figura 3.22. corresponde a [EG] na figura 3.21, então BA na figura 3.22. corresponde a [DE] na figura 3.21. Como os arcos HG e GL da figura 3.21. são iguais aos arcos CY e YX da figura 3.22. então os arcos BH e BL da figura 3.21. são iguais aos arcos BC e BX da figura 3.22 respectivamente.

Assim, o triângulo [BAV] da figura 3.22 é semelhante ao triângulo [EDK] da figura 3.21., bem como o triângulo [BAM] da figura 3.22. é semelhante ao triângulo [EDT] da figura 3.21.

Se \overline{BA} na figura 3.22. corresponde a \overline{ED} na figura 3.21., então \overline{BM} e \overline{BV} na figura 3.22. são proporcionais a \overline{ET} e \overline{EK} na figura 3.21. respectivamente.

Deste modo podemos concluir que [ET] e [EK] são os raios dos paralelos ao equador desenhados no plano de projecção.

c.q.d.

Proposição 2.2

Dada a posição no plano e a declinação do círculo paralelo ao equador como desenhar o equador?

Esta construção é análoga à anterior mas será feita com mais pormenor na demonstração.

Demonstração

Queremos demonstrar como se constrói o equador dado um paralelo a ele.

Os triângulos [BAM] e [BAV] da figura 3.22. são semelhantes aos triângulos [EDT] e [EDK] da figura 3.21., respectivamente.

Observando novamente a figura 3.21., os pontos F e Z resultam da intersecção da recta ED com os dois círculos paralelos ao equador. O ponto Y é o ponto onde a recta DT intersecta o círculo interior e o ponto X é onde a recta KD intersecta o círculo exterior.

Desde que os ângulos DTE e EDH sejam iguais, os arcos BH e RY têm a mesma amplitude e quando subtraímos a cada um deles um quarto de círculo, concluimos que os arcos FY e HG têm a mesma amplitude assim como os arcos XZ e GL.

Assim, se os arcos FY e XZ tiverem a mesma amplitude que a declinação dos paralelos em relação equador, facilmente encontramos o círculo intermédio, ou seja o equador. Para tal, basta desenhar a recta TY ou a recta KX para encontrar o ponto D e definir assim o raio do círculo que pretendemos encontrar (equador).

c.q.d.

Resumindo estas duas últimas proposições, podemos concluir que se um dos círculos for obtido através do outro, do mesmo modo, o outro pode ser obtido através do primeiro. Observando a figura 3.23, em torno do ponto E forem construídos os círculos ABGD e CHFK, os diâmetros [CF] e [HK] e desenharam-se as rectas GD, FD e FK. Assim, desde que se conheça o raio [EG] bem como o arco GT, consegue-se determinar [EF]. As rectas KF e DG são paralelas e os ângulos ZFK e GDF são iguais e por essa razão o arco ZK tem a mesma amplitude que o arco GT e por causa disso é também conhecido.

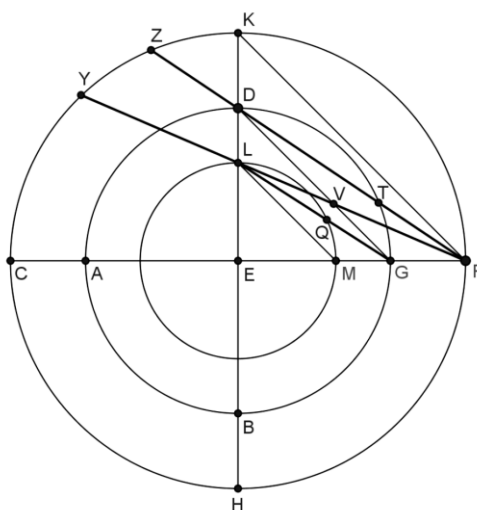


Figura 3.23 – Relação entre o equador e círculos paralelos ao equador

Do modo inverso, se [EF] for conhecido assim como a declinação do círculo CHFK, ou seja, o arco KZ, quando se constrói a recta FZ, ficamos a conhecer [ED], isto é, o raio do equador.

Proposição 2.3

As posições dos círculos no plano devem ser determinadas sempre a partir do equador. Devido à distorção provocada pela projecção estereográfica, a posição dos círculos paralelos só podem ser correctamente encontradas através da sua declinação. Por outras palavras, depois de encontrarmos a posição no plano de um círculo paralelo ao equador e dada a distância entre esse círculo e outros paralelos, essa distância não pode ser usada para os projectar no plano.

Demonstração

Queremos provar que nenhum círculo pode ser determinado pela distância entre ele próprio e outro círculo diferente do equador.

Consideremos na figura 3.23. da proposição anterior um terceiro círculo LM com centro em E e a recta FVLY. Seja o círculo DG o equador.

Então o arco KY não pode ser a distância entre o círculo interior e o exterior. Vamos supor por absurdo que é.

Sejam as rectas ML e GQLY desenhadas, então o arco KZ é a distância entre o círculo do meio e o círculo exterior e o arco ZY é a distância entre o círculo do meio e o círculo interior porque estamos a supor que o arco KY é a distância entre o círculo interior e o círculo exterior.

Pela construção, o arco QM é a distância entre os círculos LM e DG logo o ângulo MLQ é igual ao ângulo ZFY pois os arcos QM e ZY têm a mesma amplitude.

Os ângulos KFY e FLM são iguais porque os segmentos [LM] e [KF] são paralelos, então o ângulo GLV é igual ao ângulo KFD que por sua vez é igual ao ângulo GDT e, consequentemente os pontos G, L, F, e D estão inscritos na mesma circunferência porque o arco GF detém dois ângulos inscritos iguais em L e D.

Assim, os ângulos LDG e LFG são iguais por serem ângulos inscritos no mesmo arco LG.

Esta conclusão é falsa porque o ângulo LDG mede 45° e o ângulo LFG é claramente menor que 45° . Logo o arco QM não é igual ao arco ZY o que significa que o arco ZY não pode representar a distância entre o círculo interior e o equador. Mas o

arco KZ é a declinação do círculo exterior então KY não pode ser a distância entre os dois círculos paralelos ao equador.

c.q.d.

Proposição 2.4

A posição de um círculo máximo que passe pelos pólos da esfera (a projectão resulta numa recta) é determinada pelos pontos de intersecção desse círculo com o equador.

Demonstração

A veracidade desta proposição é dada como óbvia. Um círculo máximo que passe pelos pólos projecta-se como uma recta que passa pelo centro do equador, isto é, tangente ao pólo sul. Basta desenhar no plano uma recta que passe pelo pólo sul e encontrar os pontos de intersecção do equador se com essa recta. Esses pontos são a projectão dos pontos de intersecção do círculo máximo com o equador.

Proposição 2.5

Dado um círculo oblíquo em relação ao equador, a sua posição é determinada pelos círculos paralelos ao equador que passam pelos pontos do círculo dado de maior e menor declinação. As projectões destes dois círculos paralelos vão determinar a localização de um dos diâmetros do círculo dado. Este diâmetro resulta da projectão do círculo máximo que passa pelos pólos e pelos dois pontos do círculo dado com máxima e mínima declinação. Depois de encontrado o diâmetro, dividimo-lo ao meio definindo assim, o centro e o raio do círculo que se pretende encontrar.

Demonstração

Se o círculo que desejamos projectar é oblíquo, então haverá um círculo máximo que passe pelos pólos do círculo oblíquo e, ao mesmo tempo, pelos pólos da esfera.

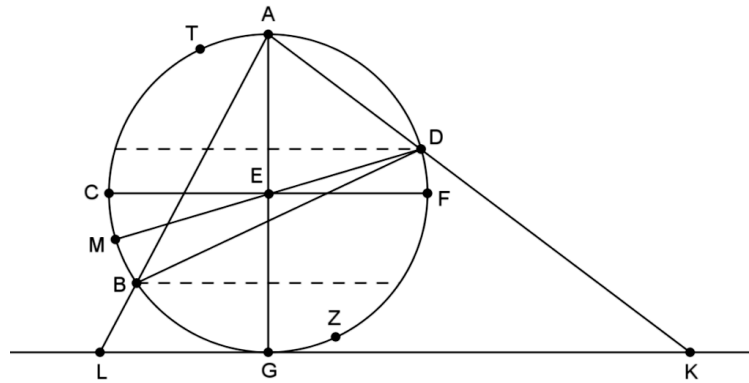


Figura 3.24 - Projecção de um círculo oblíquo

Na figura 3.24., seja esse círculo máximo o círculo definido pelas letras ABGD com centro em E, e [BD] o diâmetro que resulta da intersecção das superfícies definidas por estes dois círculos (o círculo oblíquo e o círculo máximo). Sejam os pontos Z e T os pólos do círculo oblíquo e os segmentos [AG] e [CF] perpendiculares entre si. [CF] será um diâmetro do equador. Seja a recta LK tangente à esfera no ponto G e desenhe-se os segmentos [LA] e [KA].

Então, os pólos A e G da esfera pertencem aos arcos TAD e ZGB e os arcos AD e GB representam a distância mínima entre os pólos da esfera e o círculo oblíquo. Por outro lado, os arcos DF e BC são as maior e menor declinações em relação ao equador. Portanto, círculos paralelos ao equador que passem por B e D intersectam o círculo oblíquo e o segmento [LK] é o diâmetro do círculo BD no plano da projecção. Este segmento diz também respeito à projecção do circo ABGD no mesmo plano.

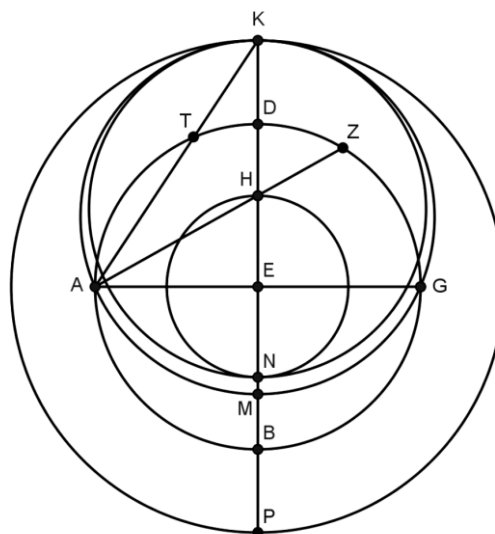


Figura 3.25 - Projecção de um círculo oblíquo

Observando a figura 3.25, vamos definir agora, o equador pelas letras ABGD com centro em E, que é também o ponto da projecção do pólo, o segmento [BD] que representa o supracitado círculo máximo que passa pelos quatro pólos, o segmento [AG] que é perpendicular a [BD].

O arco DT da figura 3.25. corresponde ao arco DF da figura 3.24. e o arco DZ da figura 3.25. corresponde ao arco CB da figura 3.24. Considere-se os segmentos [ATK] e [AHZ] e os círculos KP e NH que representam os paralelos que tocam no círculo oblíquo. O diâmetro do círculo oblíquo será o segmento [NK] que corresponde ao segmento [LGK] da figura 3.24. Encontre-se o ponto médio de [NK] e trace-se o círculo NK que é o pretendido.

c.q.d.

Proposição 2.6

Se o círculo oblíquo for também um círculo máximo, a intersecção desse círculo com o equador resulta num diâmetro comum aos dois círculos. Este diâmetro quando projectado no plano, continua a ser o diâmetro do equador contudo, já não será o diâmetro do círculo máximo oblíquo projectado pois os arcos de circunferência de um círculo oblíquo sofrem uma distorção através da projecção estereográfica.

Demonstração

Se o círculo máximo oblíquo intersectar o equador na esfera, é evidente que, no plano, também o irá intersectar. Essa intersecção é representada pelo [AG] da figura 3.25. O círculo oblíquo será o círculo AKGM que tem [KM] como diâmetro e o equador é o círculo ABGD que tem [AG] como diâmetro.

Na figura 3.24 [DM] é o diâmetro tanto do equador como do círculo oblíquo na esfera mas, no plano, $\overline{KM} \neq \overline{AG}$.

c.q.d.

Proposição 3

Esta proposição tem como objectivo determinar a posição de um ponto dado da esfera, conhecida a sua declinação.

Um círculo máximo que passe pelos pólos e também pelo ponto dado é uma recta que se desenha facilmente no plano à custa do equador. O círculo, paralelo ao equador que passa pelo ponto dado, pode ser construído no plano.

O ponto dado ficará representado onde as projecções do paralelo e do círculo máximo se intersectarem no plano.

Demonstração

O arco de círculo contido no círculo máximo que passa pelos pólos e pelo ponto dado, determina a declinação do ponto em questão. Esse arco (a declinação) está compreendido entre o ponto de intersecção do equador com o círculo máximo e o ponto dado. Então vamos representar no plano o equador ABGD e o diâmetro [BD] que representa a projecção do círculo máximo que passa pelos pólos e pelo ponto dado.

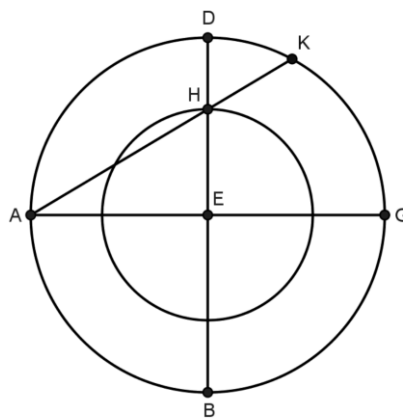


Figura 3.26 – Representação de um ponto conhecida a sua declinação

Na figura 3.26, seja D o ponto de intersecção do equador com o círculo máximo supracitado e o arco DK a declinação do ponto dado. Então, desenha-se o segmento [AG] perpendicular a [BD] e o segmento [AK]. O ponto H resulta da intersecção dos segmentos [BD] e [AK] logo, o círculo de centro em E e raio [EH] é o círculo paralelo ao equador com a declinação igual ao ponto dado. O ponto H é o ponto pretendido.

c.q.d.

O seguinte conjunto de proposições visa ensinar a dividir círculos segundo uma determinada proporção, ou seja, quando qualquer divisão é feita num círculo da superfície esférica, essa divisão também pode ser executada no plano depois do círculo ter sido projectado. Os arcos de círculo na esfera que não são paralelos ao plano de projecção são distorcidos quando são projectados, ao contrário dos arcos de círculo paralelos ao plano que permanecem semelhantes.

Existem três formas distintas de efectuar esta divisão: através de rectas, círculos paralelos e círculos máximos.

Proposição 4.1. “Através de rectas”.

Quando a posição do ponto que divide o círculo é conhecida, o círculo máximo que passa pelos pólos (projecta-se segundo uma) e pelo ponto que divide o círculo pode ser construído no plano. O ponto de intersecção da recta com a projecção do círculo dado será a localização exacta o ponto que divide esse círculo.

Demonstração

Consideremos no plano o equador ABGD de centro T e um círculo oblíquo que intersecta o equador nos pontos A e G que são diametralmente opostos. Seja o arco AD o arco que resulta da intersecção do círculo que passa pelos pólos e pelo ponto que divide o círculo oblíquo com o equador (ponto D). A recta BE que passa pelo centro e também pelo ponto D é a projecção do círculo que passa pelos pólos e, este vai formar o arco AE. O ponto E é o ponto pretendido, o seja, aquele ponto que divide (no plano) o círculo oblíquo projectado.

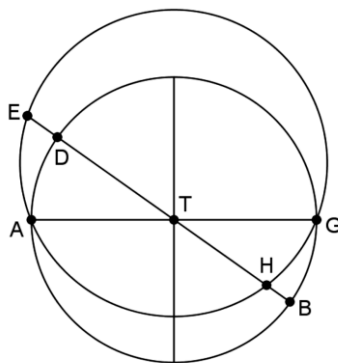


Figura 3.27 – Divisão de um círculo através de uma recta

c.q.d.

Proposição 4.2 “Através de círculos paralelos”.

Se a declinação do ponto que divide o círculo dado é conhecida, o círculo paralelo ao equador com essa declinação, pode ser representado no plano. O ponto de intersecção desse círculo com a projecção do círculo dado será a localização exacta do ponto que se pretende encontrar.

Demonstração

Seja $ABGD$ o equador de centro em E , os segmentos $[BD]$ e $[AG]$ são perpendiculares e seja AH a declinação da secção do círculo que começa em A e termina em H . A recta DH cruza a recta AG no ponto T e o círculo desenhado de centro em E e raio $[ET]$ é a projecção do paralelo ao equador que passa por H e intersecta o círculo oblíquo em Z . O arco TZ é a projecção do arco AD que se pretendia determinar.

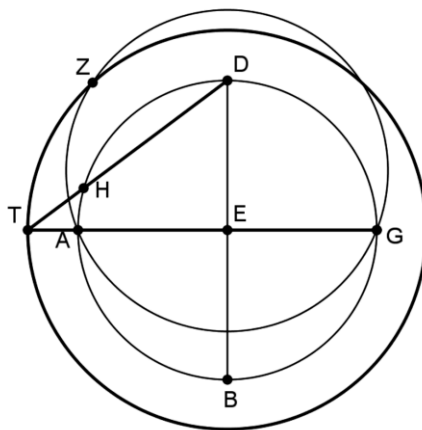


Figura 3.28 – Divisão de um círculo através de um círculo paralelo

c.q.d.

Proposição 4.3 “através de círculos máximo”

Na esfera, se um plano intermédio bissecta o ângulo entre os planos do equador e de um círculo máximo dado então, qualquer círculo máximo que passe pelos pólos do círculo definido pela intersecção do plano intermédio com a esfera, irá dividir em arcos iguais o equador e o círculo máximo dado. Por esta razão, no plano da projecção, o pólo do círculo intermédio pode ser encontrado e um círculo que passe por esse pólo, pelo ponto do equador cuja declinação seja igual à declinação do ponto que divide o círculo máximo dado e pelo ponto diametralmente oposto no equador. Este último círculo, que representa o círculo máximo que passa pelos pólos do círculo resultante do

plano bissector, intersecta-se com a projecção do círculo máximo dado no ponto pretendido.

Demonstração:

Seja $ABGD$ o círculo que passa pelos pólos do equador e sejam os segmentos $[AG]$ e $[BD]$ os diâmetros do equador e do círculo oblíquo respectivamente. Quando os arcos DA e GB são bissectados por um plano, origina um círculo de diâmetro $[HK]$ cujos pólos são os pontos T e Z . Todos os círculos máximos de diâmetro $[TZ]$ intersectam o equador e o círculo oblíquo formando arcos opostos iguais, um numa direcção e o outro na outra direcção em relação ao círculo com os pólos em T e Z .

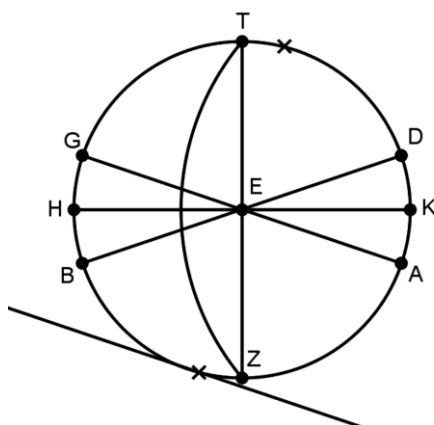


Figura 3.29 – Divisão de um círculo através de um círculo máximo

Repetido em parte a figura 3.29. Seja BED a representação do círculo que passa pelos pólos do equador e onde os pontos T e Z também pertencem. Seja o arco DH da figura 3.30 igual ao arco AZ da figura 3.29. e seja o segmento $[AH]$ desenhado na figura 5.4.. O ponto K da figura 3.30. será a posição do pólo Z da figura 3.29. Sejam os arcos AL e GM da figura 3.30. iguais à primeira secção do círculo oblíquo que começa em A . E seja o arco de círculo MKL desenhado. Este é um arco de círculo máximo que passa por K e bissecta o equador através de arcos iguais a AL e GM , logo, vai intersectar o círculo oblíquo e formar o arco NA que é igual às secções do equador. O arco NA era o pretendido.

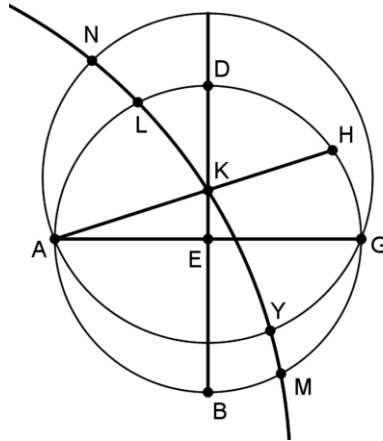


Figura 3.30 - Divisão de um círculo através de um círculo máximo

Proposição 5

Se a altura de um ponto é dada a partir de um ponto conhecido que pertence a um círculo oblíquo da esfera, então a sua posição no plano também poderá ser conhecida.

Demonstração

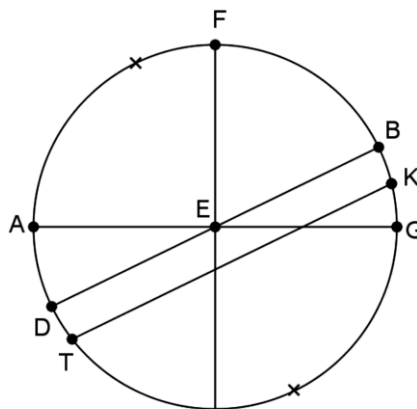


Figura 3.31

Seja $ABGD$ o círculo que passa pelos pólos do círculo oblíquo e do equador. Seja $[AG]$ o diâmetro do equador e $[BD]$ o diâmetro do círculo oblíquo. O segmento $[TK]$ é paralelo a $[BD]$, logo, os arcos BK ou DT serão a latitude, medida desde o círculo oblíquo, do ponto que estamos interessados em determinar no plano, desde que esse ponto pertença ao círculo paralelo ao oblíquo e de diâmetro $[TK]$. Os arcos GB e AD são conhecidos bem como os arcos BK e DT , logo, os arcos AT e GK são também conhecidos.

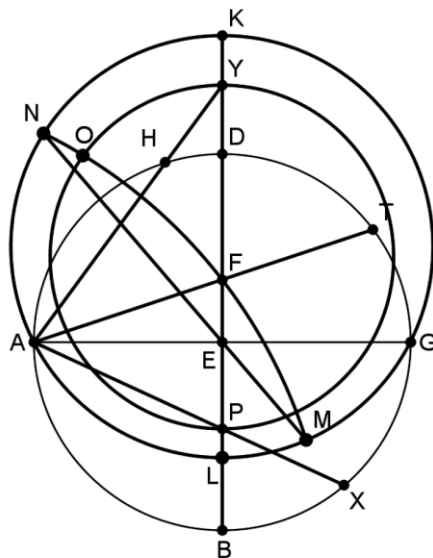


Figura 3.32

Então, na figura 3.32, seja o equador definido pelas letras ABGD com diâmetros [AG] e [BD] e, seja LAKG, o círculo oblíquo. Se o arco GT da figura 3.32 for equivalente ao arco BG da figura 3.31 que é a declinação do círculo oblíquo a partir do equador, então constrói-se [AT] onde F será o pólo do círculo AKLG.

Por outro lado sejam os arco BX e DH da figura 3.32 equivalentes aos arco ADT e GK respectivamente da figura 3.31, então, desenham-se os segmentos [AX] e [AHY] e obtendo-se assim o segmento [PEY] que é (como o segmento [TK] da figura 3.31) o diâmetro do círculo paralelo ao oblíquo. Assim, divide-se o [PY] ao meio encontrando-se assim o centro do círculo POY que é o paralelo ao círculo oblíquo e que passa pelo ponto cuja latitude, dada a partir do círculo oblíquo, foi dada.

Seja N o ponto da circunferência do círculo oblíquo onde se a latitude do ponto dado foi assumida e construa-se o segmento [NEM] onde M e N são pontos opostos na esfera. Então, considere-se o arco MFON pertencente ao círculo que passa por pelos pontos M, F e N. Este será o círculo máximo que bissecta o círculo oblíquo na esfera e passa pelo seu pólo. Como este círculo máximo passa por N, também vai intersectar o ponto cuja altitude foi assumida a partir de N. Então a intersecção desse arco com o círculo POY, isto é, o ponto O, será a posição do ponto que pretendíamos encontrar no plano.

c.q.d.

Teorema 3 (preservação dos ângulos)

O ângulo entre duas curvas da superfície esférica é preservado quando essas curvas são projectadas estereograficamente.

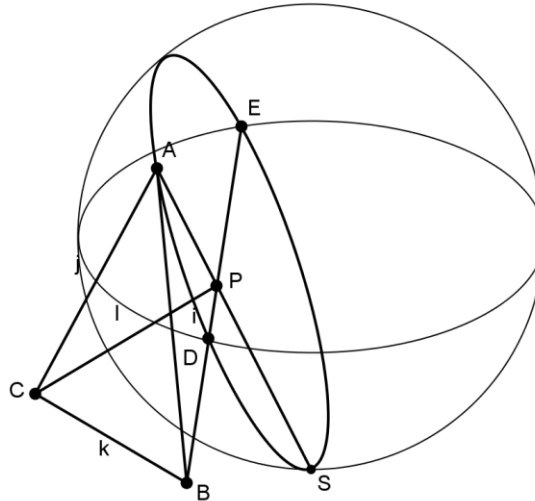


Figura 3.33 – Conservação dos ângulos

Demonstração

Observando a figura 3.33, S é a origem da projecção e A um ponto dado. Pelo ponto A fazem-se passar duas tangentes à esfera cuja orientação é a mesma das duas curvas dadas. Note-se que o ângulo entre as duas curvas é igual ao ângulo entre as tangentes às curvas no ponto de intersecção.

Sejam B e C os pontos de intersecção das duas tangentes com o plano da projecção e P a projecção do ponto A nesse mesmo plano. [BA] e [CA] projectam-se no plano em [BP] e [CP] respectivamente e, se a proposição for verdadeira, o ângulo BPC será igual ao ângulo entre as projecções das duas curvas, ou seja, queremos provar que $\widehat{BPC} = \widehat{BAC}$.

Observando o esquema anterior por outro ângulo obtemos a seguinte figura:



O plano ABS intersecta a esfera ao longo do círculo ADSE e AB é tangente ao círculo ADSE no ponto A.

$$\widehat{BAS} = 90^\circ - \widehat{SAG} = 90^\circ - \widehat{GSQ} = \widehat{SQG}$$

Logo $\widehat{B\hat{A}S} = \widehat{B\hat{P}A}$ porque os ângulos BPA e SQG são ângulos de lados paralelos.

Seguindo um raciocínio análogo a este, podemos concluir que $\overline{CA} = \overline{CP}$.

c.q.d.

Teorema 4 (demonstração alternativa do teorema 3)

Observando a figura 3.35, S é a origem da projecção e N é o outro pólo. O plano da projecção é tangente à esfera no ponto N.

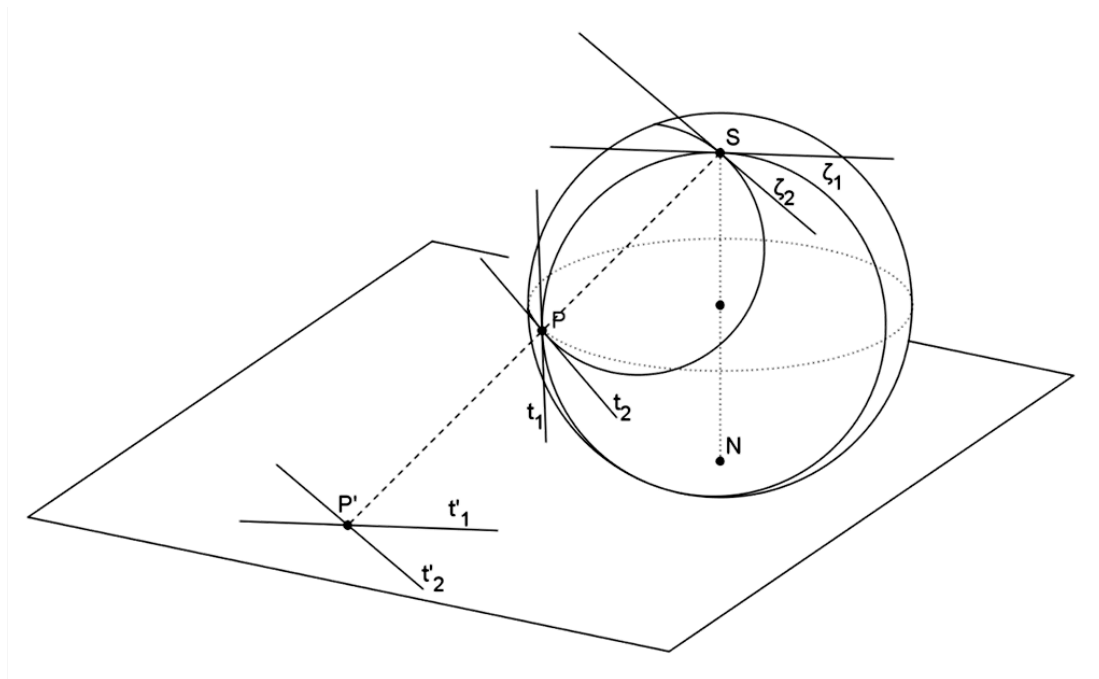


Figura 3.35 – Teorema da conservação dos ângulos

Sejam t_1 e t_2 rectas tangentes à esfera no ponto P e α o ângulo entre elas. Sejam t'_1 e t'_2 as projecções de t_1 e t_2 respectivamente e α' o ângulo formado por elas. Então $\alpha = \alpha'$.

Demonstração

A intersecção do plano que contém t_1 com a esfera é um círculo que passa por S, então, t_1 projecta-se como uma recta t'_1 que passa por P'. τ_1 , a tangente ao círculo em S, é paralela a t'_1 porque todas as tangentes em S são paralelas ao plano da projecção. Analogamente, o plano definido por t_2 e S tem a tangente τ_2 que é paralela a t'_2 . Então o ângulo α' entre t'_1 e t'_2 é igual ao ângulo entre τ_1 e τ_2 que por sua vez é igual ao ângulo entre t_1 e t_2 . Logo $\alpha = \alpha'$.

c.q.d.

Corolário 1

Dado um círculo, a sua projecção estereográfica é também um círculo que tem por centro a projecção do vértice de um cone tangente à esfera ao longo do círculo dado.

Demonstração

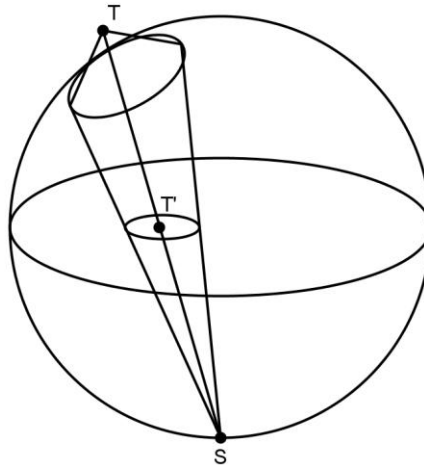


Figura 3.36 – T' é a projecção estereográfica de T

Consideremos um cone circunscrito à esfera ao longo do círculo dado e seja T o seu vértice. As geratrizes do cone são tangentes à esfera e perpendiculares ao círculo dado. Pela proposição anterior, as projecções das geratrizes ficarão perpendiculares ao círculo projectado e contêm um ponto em comum que é a projecção do ponto T , ou seja, T' (T é comum a todas as geratrizes). Assim podemos concluir que T' é o centro do círculo projectado.

c.q.d.

Corolário 2

A projecção estereográfica de um círculo máximo é um círculo tendo como centro o ponto onde a recta perpendicular ao plano definido pelo círculo dado e que passa pela origem da projecção, intersecta o plano da projecção.

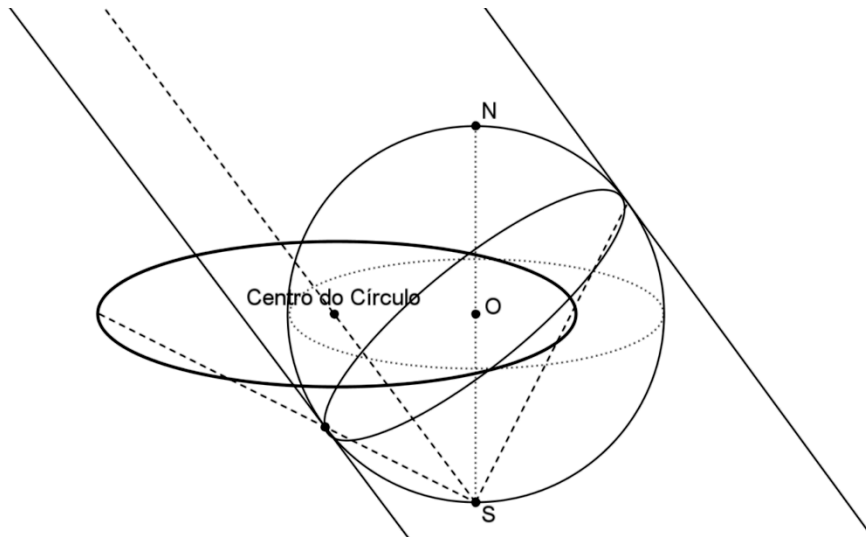


Figura 3.37 – Centro do círculo máximo projectado

Demonstração

Esta demonstração é análoga à do corolário 1, apenas temos de considerar um cilindro circunscrito ao círculo máximo. Isto deve-se ao facto das tangentes à esfera ao longo do círculo máximo dado nunca se encontrarem por serem paralelas. Para se encontrar o centro do círculo projectado, o raio que sai da origem da projecção terá que ser paralelo às paredes do cilindro, ou seja, perpendicular ao plano definido pelo círculo dado.

c.q.d.

Teorema 5 (equação fundamental do astrolábio)

Vamos considerar a projecção de um ponto X da esfera situado no hemisfério norte cujo ângulo de declinação em relação ao plano da projecção é δ . Consideremos também que a esfera celeste tem centro em O e raio R . O ponto N é o pólo norte e o ponto S é o pólo sul. A projecção do ponto X é o ponto X' . O objectivo é encontrar a distância entre os pontos O e X' à qual designaremos por r .

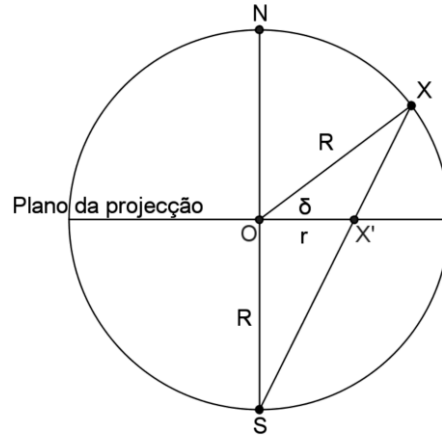


Figura 3.38 - Relação entre r e a declinação de um ponto X

Nas condições definidas anteriormente, $r = R \times \frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta}$

Demonstração

$$\angle SOX = 90^\circ + \delta$$

O triângulo SOX é isósceles porque $\overline{OS} = \overline{OX} = R$ logo, como num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais, concluímos que $\widehat{OSX} = \widehat{OXS}$.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° logo,

$$\begin{aligned} 2 \times \widehat{OSX} + 90 + \delta &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \widehat{OSX} &= \frac{90 - \delta}{2} \end{aligned}$$

Por outro lado, como o triângulo SOX' é rectângulo em O , temos que

$$\tan(\widehat{OSX}) = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{90 - \delta}{2}\right) = \frac{r}{R} \Leftrightarrow r = R \times \tan\left(\frac{90 - \delta}{2}\right)$$

Desenvolvendo a equação anterior obtemos:

$$r = R \times \tan\left(\frac{90 - \delta}{2}\right) \Leftrightarrow r = R \times \sqrt{\frac{1 - \cos(90 - \delta)}{1 + \cos(90 - \delta)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = R \times \sqrt{\frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}} \Leftrightarrow r = R \times \sqrt{\frac{1^2 - \sin^2 \delta}{(1 + \sin \delta)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = R \times \sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{(1 + \sin \delta)^2}} \Leftrightarrow r = R \times \frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta}$$

c.q.d.

Observando novamente a figura 3.38, se consideramos um círculo paralelo ao plano da projecção que passe por X, todos os pontos desse círculo têm o mesmo ângulo de declinação (δ) logo, os pontos que resultam da projecção desse círculo no plano equatorial, vão estar todos à mesma distância (r) do centro O, ou seja, o resultado da projecção é um círculo de centro O e raio r . Assim, podemos comprovar mais uma vez que as projecções estereográficas de círculos paralelos ao plano da projecção são também círculos de centro em O.

Teorema 6 (metade do ângulo)

Observando a figura 3.39 temos um círculo de raio R e dois diâmetros perpendiculares entre si. O ângulo de $\beta = (90 - \alpha)/2$.

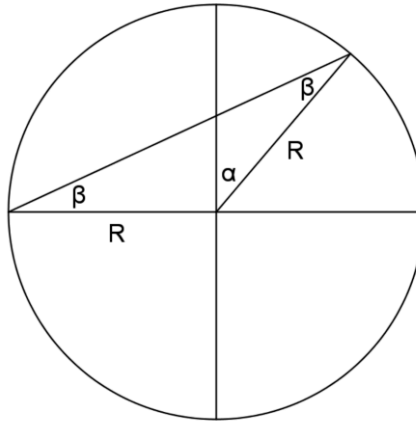


Figura 3.39 - $\beta = (90 - \alpha)/2$

Demonstração

Esta demonstração é muito simples, basta para isso verificar que a corda dá origem a um o triângulo isósceles. Então,

$$2\beta + 90 + \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \beta = \frac{90 - \alpha}{2}$$

c.q.d.

4. Aplicações da Projecção Estereográfica

4.1. O astrolábio

O astrolábio trata-se de um instrumento astronómico que resolve problemas relacionados com o tempo e com a posição do sol e das estrelas. O nome astrolábio vem do grego *aster*, que significa estrela e *lambanein* que possui vários significados: tomar, capturar, colher, apreender, compreender. Juntando as duas palavras, astrolábio significa compreender as estrelas.

As primeiras referências ao astrolábio surgem nos séc. IV e V da nossa era. Synesimus de Cirene, que morreu em ac. 430, construiu um astrolábio planisférico. Philopon de Alexandria escreveu um livro sobre o astrolábio em ca. 642. O astrolábio mais antigo que sobreviveu até ao nosso tempo foi feito por Mahmud e está datado a partir de 984.



Frente



Verso

As imagens anteriores são de um astrolábio plano feito por Nicol Patenal em 1616 que se encontra exposto no Museu Nacional da Marinha em Lisboa.

O astrolábio pode ser usado para encontrar a altura e o azimute das estrelas ou outros corpos celestes; obter a latitude e a longitude da elíptica; determinar a hora do dia através do sol, da lua ou outras estrelas; determinar os eclipses lunares e solares, o dia do ano, o signo do zodíaco, a altura máxima do sol em qualquer dia e a duração do dia ou da noite; calcular senos e co-senos; determinar as casas astrológicas; etc.

Luís de Camões nos *Lusíadas* faz referência a uma das funcionalidades do astrolábio: “Pelo novo instrumento do Astrolábio me detenho em tomar do Sol a altura” (V, 25 e 26).

Um astrolábio é um instrumento portátil, achatado e de forma circular, com cerca de 15 cm de diâmetro, no entanto, esta dimensão pode variar. O corpo principal deste instrumento chama-se a madre, é composta por duas partes: um disco sólido que define a parte de trás do astrolábio e um anel graduado à volta da madre, chamado rodela, com o mesmo diâmetro da madre.

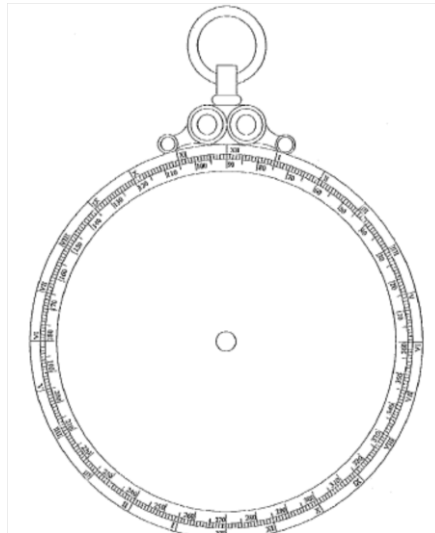


Figura 4.1 – Frente de uma madre

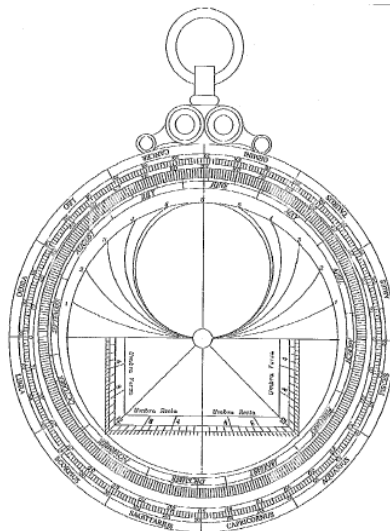


Figura 4.2 – Parte de trás de uma madre

Sobre a madre encaixavam vários pratos circulares denominados por lâminas. Para cada latitude da esfera terrestre existe uma lâmina específica que continha a projecção estereográfica do céu celeste.

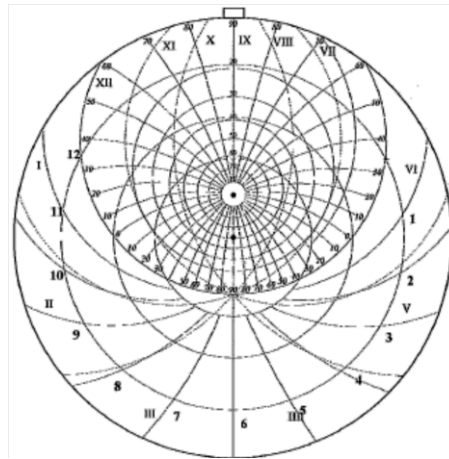


Figura 4.3 - Lâmina

Por cima das lâminas ainda se podia encaixar a rede, um disco circular, o mais entalhado possível para deixar ler as indicações da lâmina que se encontram por baixo. A rede dava a projecção do zodíaco e das estrelas fundamentais com os respectivos nomes.

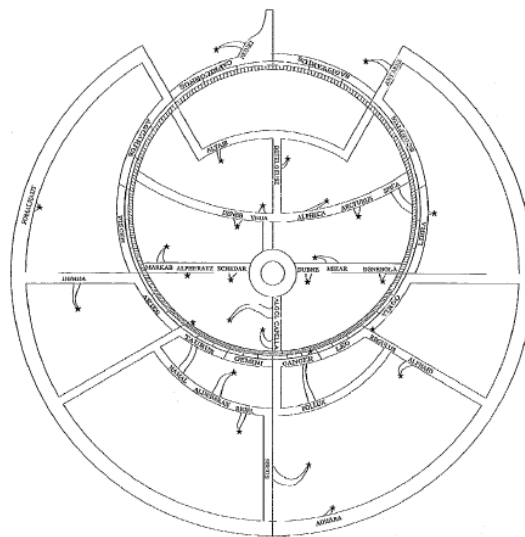


Figura 4.4 - Rede

A alidade (do altim regula) girava na parte de trás e em torno do centro do astrolábio (centro da madre e de todas as lâminas) e servia para encontrar a altura dos astros.

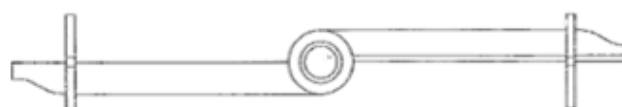


Figura 4.5 - Alidade

Por cima da rede é colocada a régua, dividida em declinações para as fazer corresponder à estrela posicionada na rede.



Figura 4.6 – Régua

A figura 4.7 ilustra como as várias peças do astrolábio encaixavam umas nas outras.

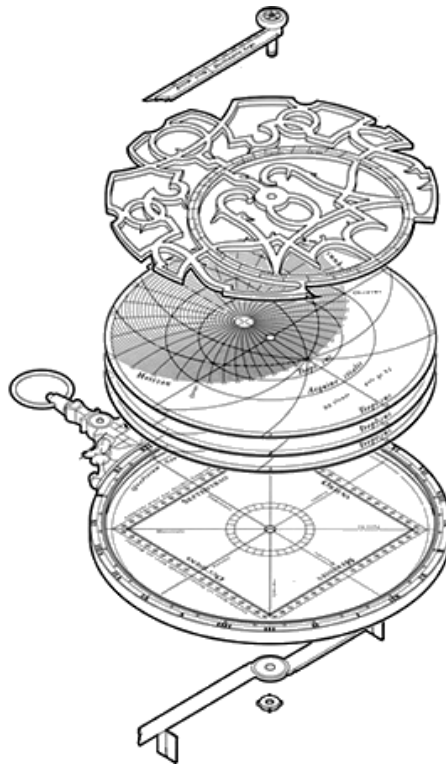


Figura 4.7 – As várias componentes do astrolábio

A figura 4.8 é a fotografia de um astrolábio iraniano do séc. XVIII totalmente desmontado onde se podem ver a madre, as lâminas, a rede, a régua e a alidade.

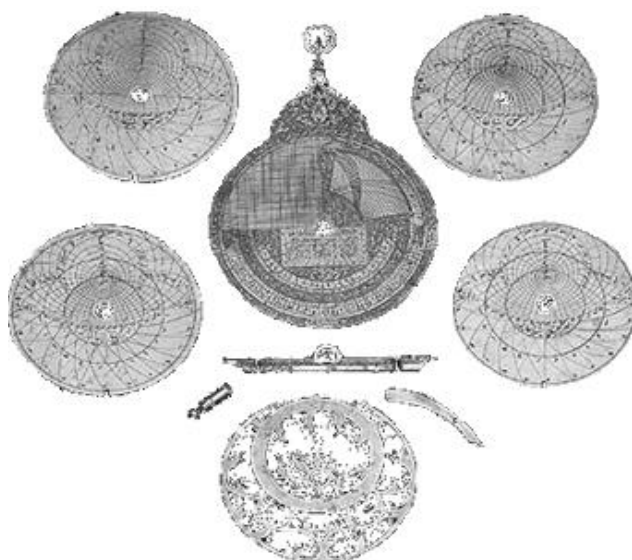


Figura 4.8 – Componentes de um astrolábio iraniano do séc. XVIII

Como já foi referido, a base matemática que está na origem do astrolábio é precisamente a projecção estereográfica. As lâminas do astrolábio não são todas iguais, para cada latitude em que o observador se encontre, este terá de utilizar a respectiva lâmina. Os próximos parágrafos tem como objectivo mostrar como se constrói, graficamente e analiticamente, alguns dos elementos que estão presentes numa lâmina de um astrolábio.

Assim, vamos considerar que a projecção estereográfica é feita considerando que o plano da projecção é o plano equatorial e que a origem da projecção é o pólo sul.

A lâmina de um astrolábio é circular e consideramos que o seu bordo é a projecção do Trópico de Capricórnio. Isto significa que não se vai projectar a parte da esfera celeste que se encontra a sul deste trópico e que o diâmetro da lâmina representa o diâmetro do Trópico de Capricórnio.

O Trópico de Capricórnio é um círculo menor paralelo ao plano da projecção, logo, a sua projecção é um círculo concêntrico com o equador pelo que o centro da lâmina é o centro tanto do equador como do trópico de Capricórnio.

O meridiano é um círculo máximo que passa pelos pólos da esfera logo, a sua projecção é uma recta que passa pelo centro da lâmina. Deste modo, o segmento vertical desenhado na lâmina do astrolábio representa um meridiano.

Deverá ser também representado na lâmina, um segmento que passe pelo centro e que seja perpendicular ao meridiano (horizonte equatorial).

Os elementos da esfera celeste mais simples de projectar são o Equador e o Trópico de Capricórnio. Estes dois elementos são círculos com uma declinação fixa, pelo que as suas representações no plano serão também círculos.

Assim, se o raio do círculo correspondente ao Trópico de Capricórnio for R_{cap} , e a declinação dos trópicos em relação ao equador for ε , então, pelo Teorema da Equação Fundamental do Astrolábio, o raio do equador R_{eq} obtém-se do seguinte modo:

$$R_{eq} = R_{cap} \tan\left(\frac{90 - \varepsilon}{2}\right)$$

O raio do Trópico de Câncer R_{can} obtém-se a partir de R_{eq} e utilizando mais uma vez o Teorema da Equação Fundamental do Astrolábio:

$$R_{can} = R_{eq} \tan\left(\frac{90 - \varepsilon}{2}\right)$$

Pelas proposições já estudadas, também é possível fazer a construção geométrica do Equador e do Trópico de Câncer a partir do Trópico de Capricórnio:

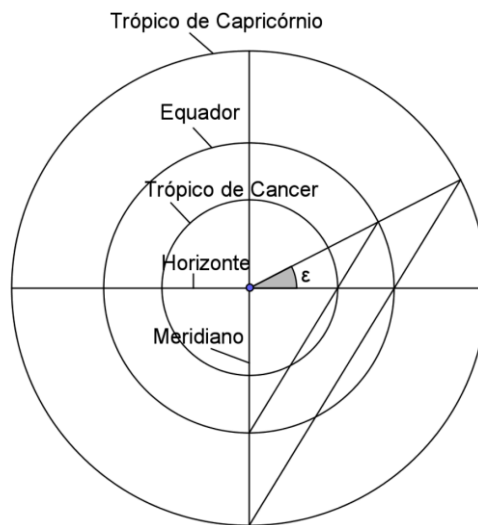


Figura 4.9 – Construção geométrica do equador e do trópico de câncer

Depois dos Trópicos e do Equador estarem desenhados na lâmina, o passo seguinte é representar o Horizonte e as Almucantaras.

O horizonte é o círculo que representa a intersecção do plano onde o observador se encontra no globo terrestre com a esfera celeste. Se o observador não estiver nos pólos nem no equador, o plano do seu horizonte vai ser oblíquo em relação ao plano do equador. As Almucantaras são os círculos da esfera celeste paralelos ao círculo do horizonte.

O horizonte e as almucantaras que ficam acima do horizonte são círculos oblíquos em relação ao equador logo projectam-se também como círculos. Como já foi referido, é possível determinar correctamente as posições desses círculos mas, apenas parte deles ficam representados na lâmina do astrolábio, no entanto, a parte exterior à lâmina é necessária para definir os limites do círculo e desenhá-lo rigorosamente.

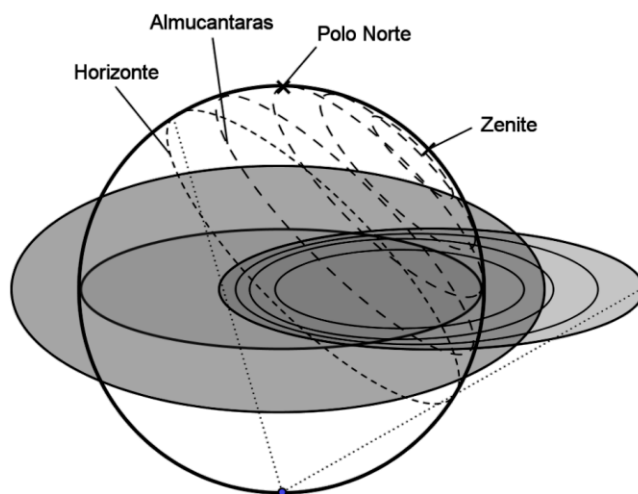


Figura 4.10 - Projecção das almucântaras

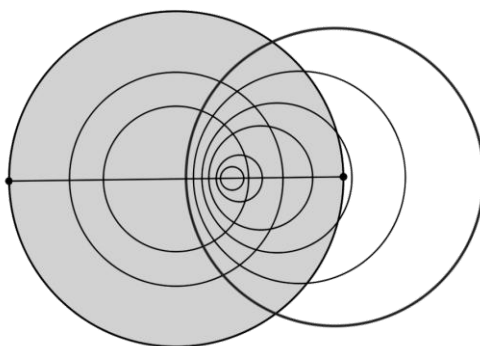


Figura 4.11 - Projecção de parte das almucântaras

Na figura 4.12 está representado o plano do horizonte relativo ao local onde o observador se encontra. Esse observador terá que descobrir o ângulo que o plano do horizonte faz com o plano do equador. Para isso, tem que medir o ângulo que o horizonte faz com a Estrela Polar, chamemos φ a esse ângulo logo, $90^\circ - \varphi$ será a amplitude do ângulo pretendido.

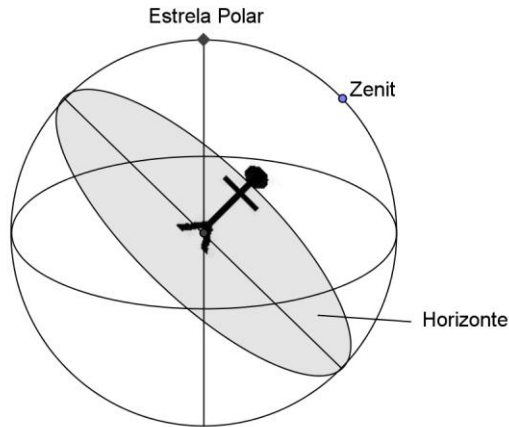


Figura 4.12 - Plano do horizonte

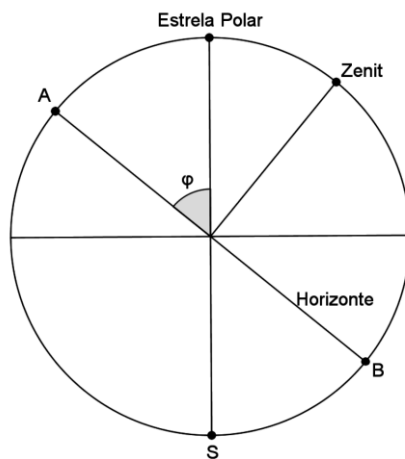


Figura 4.13 - Ângulo entre o equador e o horizonte

Para desenhar o horizonte, vamos usar o método para projectar um círculo oblíquo. Este fica determinado pelos círculos paralelos ao equador que passam pelos pontos de menor e maior declinação do horizonte. Sejam A e B esses pontos.

A projecção do ponto A, ou seja, A' , será o ponto onde o segmento de recta [AS] intersectar o equador e a projecção do ponto B, ou seja, B' , será onde o segmento de recta [SB] intersectar o plano do equador. Assim, o segmento $[A'B']$ será o diâmetro do horizonte projectado e o centro será o ponto médio de $[A'B']$.

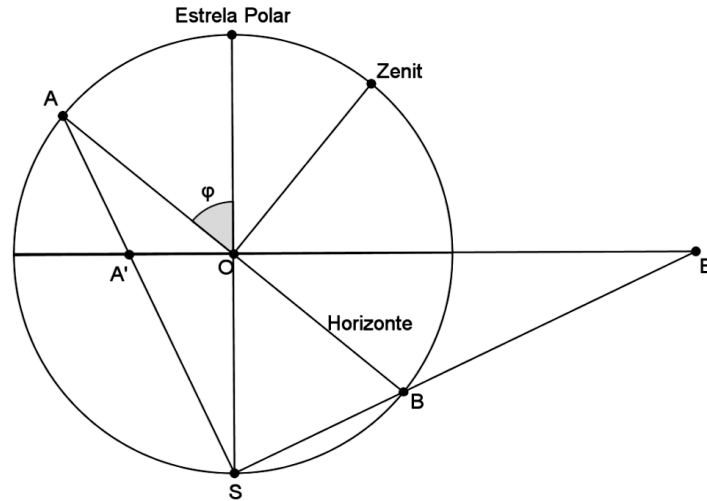


Figura 4.14 - Construção do horizonte

Pela equação fundamental do astrolábio:

$$\overline{A'O} = R \times \tan\left(\frac{90 - (90 - \varphi)}{2}\right) = -R \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Onde $R = \overline{OS}$ = comprimento do raio do equador.

$B\hat{O}B' = -(90 - \varphi)$ logo, usando mais uma vez a equação fundamental do astrolábio, vem que:

$$\overline{OB'} = R \tan\left(\frac{90 - (-(90 - \varphi))}{2}\right) = R \tan\left(\frac{180 - \varphi}{2}\right) = R \tan\left(90 - \frac{\varphi}{2}\right) = R \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Se X for o ponto referente à projecção do centro do horizonte, então X é o ponto médio do segmento $[A'B']$, assim a abcissa do ponto X obtém-se fazendo:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\overline{OB'} + \overline{A'O}}{2} = \frac{R \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) - R \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2} = \frac{R \left(\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)}{2} = \\ &= \frac{R}{2} \times \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) = R \times \left(\frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right) \end{aligned}$$

Como:

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Vem:

$$R \times \left(\frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right) = R \times \frac{1}{\tan\left(\frac{2\varphi}{2}\right)} = R \cot(\varphi) = R \tan(90 - \varphi) = R \cot(\varphi)$$

Podemos ainda deduzir a fórmula que nos permite calcular o comprimento do raio do círculo do horizonte (R_{Hor}). O raio obtem-se fazendo a diferença entre $\overline{OB'}$ e a abcissa do ponto X:

$$\begin{aligned} R_{Hor} &= R \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) - R \cot(\varphi) = R \left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cot(\varphi) \right] = \\ &= R \left[\frac{1}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin \varphi} \right] \end{aligned}$$

Como:

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin(A)}{1 + \cos(A)}$$

Vem:

$$\begin{aligned} R \left[\frac{1}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin \varphi} \right] &= R \left[\frac{1}{\frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)}} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin \varphi} \right] = \\ &= R \left[\frac{1 + \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right] = R \left(\frac{1}{\sin(\varphi)} \right) = \frac{R}{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

Deste modo, temos tudo o que é necessário para determinar rigorosamente a projecção do horizonte. No entanto, também é possível fazer uma construção gráfica do horizonte. Considere-se a seguinte figura:

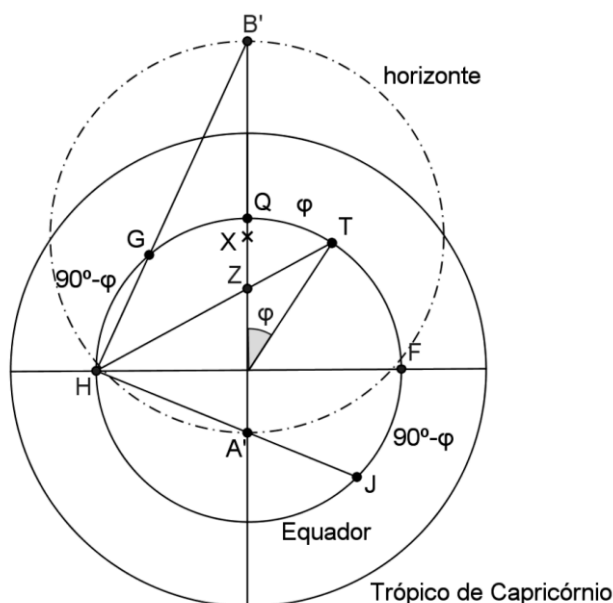


Figura 4.15 - Construção geométrica do horizonte

Sobre o equador, marca-se um arco de amplitude φ a partir do meridiano. Seja ele o arco QT. Constrói-se um segmento desde o ponto mais a oeste do equador (ponto H) até ao ponto T e, onde este segmento intersectar o meridiano, obtém-se a projecção do Zénite representada na figura 4.15 pelo ponto Z.

Do mesmo modo, sobre o equador, marca-se um arco de amplitude $90^\circ - \varphi$, a partir do horizonte equatorial em direcção a sul. Seja ele o arco FJ. Constrói-se um segmento desde o ponto H até ao ponto J e, onde este intersectar o meridiano obtemos a projecção do ponto A do horizonte, ou seja, o ponto A'.

De um modo similar, constrói-se sobre o equador um arco de amplitude $90^\circ - \varphi$, a partir do ponto H em direcção a norte. Seja ele o arco HG. Seguidamente, prolonga-se o segmento [HG] até este se intersectar com o prolongamento do meridiano. Obtém-se assim a projecção do ponto B do horizonte, ou seja, o ponto B'.

O segmento [A'B'] e o seu ponto médio correspondem respectivamente ao diâmetro e ao centro do horizonte.

Estamos em condições de conseguir marcar o círculo correspondente ao horizonte, contudo apenas desenhamos a parte do horizonte que fica dentro do Trópico de Capricórnio.

Uma lâmina do astrolábio contém, para além dos elementos que já foram tratados, as almucântaras. As almucântaras ou círculos de altitude, são círculos menores paralelos ao horizonte. O processo para marcar estes círculos menores na lâmina do astrolábio é idêntico ao do horizonte.

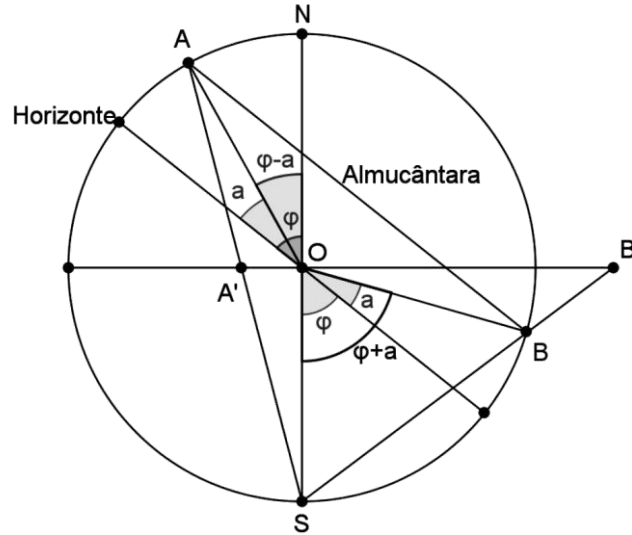


Figura 4.16 - Projecção das almucântaras

Observando a figura 4.16, se a altura da almucântara em relação ao horizonte for de a° , então:

$$\overline{OA'} = R \tan\left(\frac{\varphi-a}{2}\right); \quad \overline{OB'} = R \cot\left(\frac{\varphi+a}{2}\right)$$

Podemos ainda deduzir a fórmula que nos permite determinar a distância do centro (C) da almucântara até ao centro do instrumento:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \frac{\overline{OB'} - \overline{OA'}}{2} = \frac{R \cot\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) - R \tan\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)}{2} = R \left[\frac{\cos\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi-a}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)} \right] = \\ &= R \left[\frac{\cos\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)} \right] * \end{aligned}$$

Como:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \times \cos B \mp \sin A \times \sin B$$

e

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

vem:

$$* = R \frac{\cos \left(\frac{\varphi+a}{2} + \frac{\varphi-a}{2} \right)}{\sin \varphi + \sin a} = R \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \sin a}$$

Esta equação também pode ser deduzida usando o Corolário 1 que afirma: dado um círculo, a sua projecção estereográfica é também um círculo que tem por centro a projecção do vértice de um cone tangente à esfera ao longo do círculo dado.

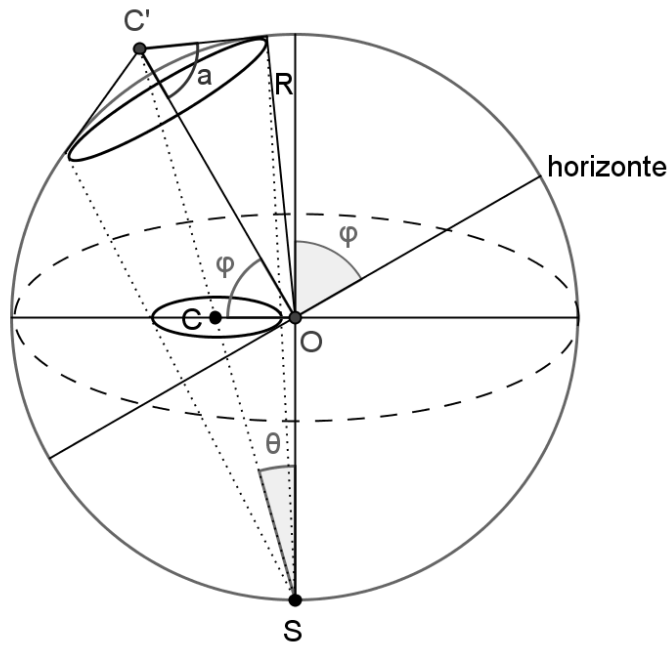


Figura 4.17 -

Observando a figura 4.17, queremos descobrir a o comprimento de $[OC]$, onde C é o centro da almucântara projectada e C' é o vértice do cone tangente à esfera a que se refere o corolário 1.

$$\tan \theta = \frac{\overline{OC}}{R} \Leftrightarrow \overline{OC} = R \tan \theta$$

Note-se que $\theta = \sphericalangle OSC$.

$$\sin a = \frac{R}{\overline{OC'}} \Leftrightarrow \overline{OC'} = \frac{R}{\sin a}$$

As equações polares do ponto C' relativamente ao ponto O são:

$$\begin{cases} C'_x = \overline{OC'} \cos \varphi \\ C'_y = \overline{OC'} \sin \varphi \end{cases}$$

As equações polares do ponto C' relativamente ao ponto S são:

$$\begin{cases} C'_x = \overline{OC} \cos \varphi \\ C'_y = \overline{OC} \sin \varphi + R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\overline{OC'} \cos \varphi}{\overline{OC'} \sin \varphi + R} = \frac{\frac{R}{\sin a} \cos \varphi}{\frac{R}{\sin a} \sin \varphi + R} = \frac{\frac{R \cos \varphi}{\sin a}}{\frac{R \sin \varphi + R \sin a}{\sin a}} = \\ &= \frac{R \cos \varphi}{R(\sin \varphi + \sin a)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \sin a} \end{aligned}$$

Logo:

$$\overline{OC} = R \tan \theta = \frac{R \cos \varphi}{\sin \varphi + \sin a}$$

Finalmente, a fórmula para calcular o raio (r_{alm}) da almucântara deduz-se de modo análogo:

$$r_{alm} = \frac{\overline{OB'} + \overline{OA'}}{2} = \frac{R \cot\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) + R \tan\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)}{2} =$$

$$= R \left[\frac{\frac{\cos\left(\frac{\varphi+a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)} \right] =$$

$$= R \left[\frac{\cos\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\varphi+a}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-a}{2}\right)} \right] =$$

$$= R \frac{\cos\left(\frac{\varphi+a}{2} - \frac{\varphi-a}{2}\right)}{\sin\varphi + \sin a} =$$

$$= R \frac{\cos a}{\sin\varphi + \sin a}$$

A construção gráfica da almucântara é igual à do horizonte pelo que apenas se apresenta a figura:

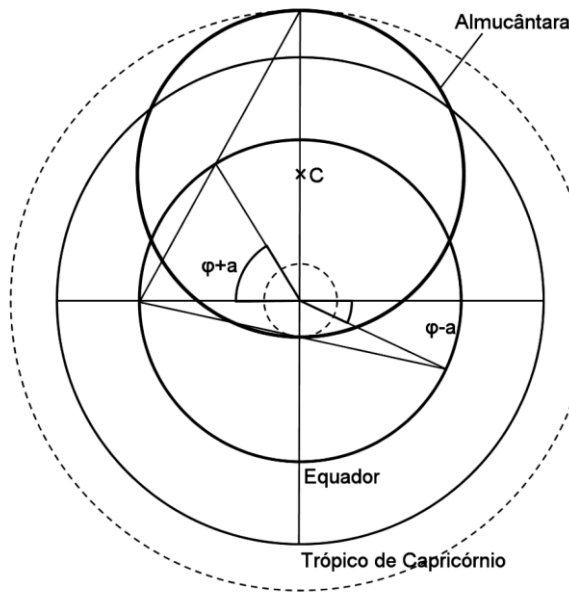


Figura 4.18 - Projecção de uma almucântara de altura $90 - \varphi$

No astrolábio as almucântaras podem ser desenhadas em intervalos de 1, 2, 3, ou 5 graus dependendo do tamanho do instrumento, quanto maior for a lâmina do astrolábio melhor será a resolução conseguida.

É interessante verificar que a almucântara de altura $(90 - \varphi)$ será tangente ao equador. Recorde-se que φ é a altura da estrela polar, ou seja, do pólo norte. O ponto de tangência será, na figura 4.14, o ponto B' logo:

$$\overline{OB'} = R \cot\left(\frac{\varphi + a}{2}\right)$$

Se $a = 90 - \varphi$ então:

$$\overline{OB'} = R \cot\left(\frac{\varphi + 90 - \varphi}{2}\right) = R \cot 45 = R = \text{raio do equador}$$

A figura 4.19 mostra de forma intuitiva esta propriedade.

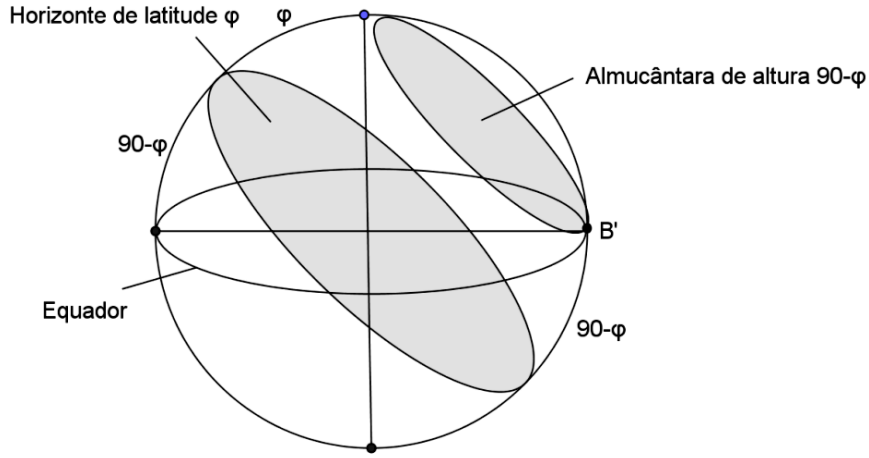


Figura 4.19 - Almucântara de altura $(90 - \varphi)$ é tangente ao equador

Assim, para qualquer altura cuja diferença com $(90 - \varphi)$ seja n , essa almucântara cruzará o meridiano com declinação n .

Seja $a = 90 - \varphi + n$, então:

$$\begin{aligned} \overline{OB'} &= R \cot\left(\frac{\varphi + 90 - \varphi + n}{2}\right) = R \cot\left(\frac{90 + n}{2}\right) = \\ &= R \frac{1}{\tan\left(\frac{90+n}{2}\right)} = R \frac{1}{\frac{\sqrt{1-\cos(90+n)}}{\sqrt{1+\cos(90+n)}}} = R \frac{1}{\frac{\sqrt{1+\sin(n)}}{\sqrt{1-\sin(n)}}} = \\ &= R \frac{1}{\frac{\sqrt{(1+\sin(n))^2}}{\sqrt{1^2-\sin^2(n)}}} = R \frac{1}{\frac{1+\sin(n)}{\cos(n)}} = R \frac{\cos(n)}{1+\sin(n)} = R \tan\left(\frac{90-n}{2}\right) \end{aligned}$$

Ou seja, $\overline{OB'}$ = ao raio do círculo paralelo ao equador de declinação n .

Observando a figura 4.20, pode-se intuir esta propriedade das almucântaras:

- FJ é o horizonte;
- AB é o equador;
- GB é a almucântara de altura $90 - \varphi$ que é tangente ao equador;
- HD é a almucântara de altura $90 - \varphi + n$;
- CD é o círculo de declinação n que é tangente a HD.

É de notar que os pontos de tangência pertencem ao meridiano representado pelo segmento $[AB]$.

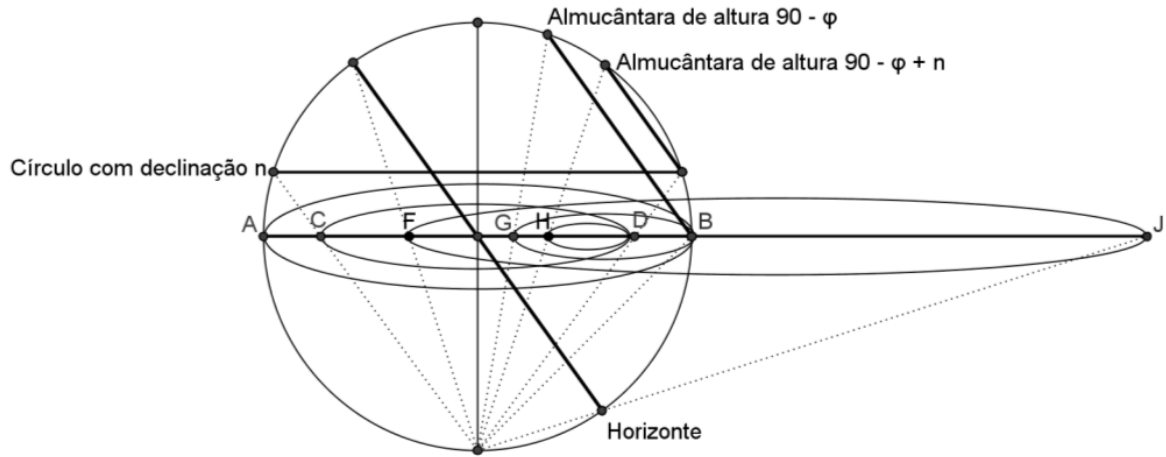


Figura 4.20 – Propriedade da almucântaras

Estamos em condições de, observando para uma lâmina, descobrir para que declinação esta foi construída. Se φ é a altura da Estrela Polar, então $90^\circ - \varphi$ corresponde a essa declinação. A almucântara de altura $90 - \varphi$ é tangente ao equador logo, procura-se na lâmina, qual das almucântaras é tangente ao equador e lê-se a sua altura. Supondo que essa altura é x , então $90 - \varphi = x$ logo, $\varphi = 90 - x$.

Considere-se a título de exemplo, a seguinte lâmina:

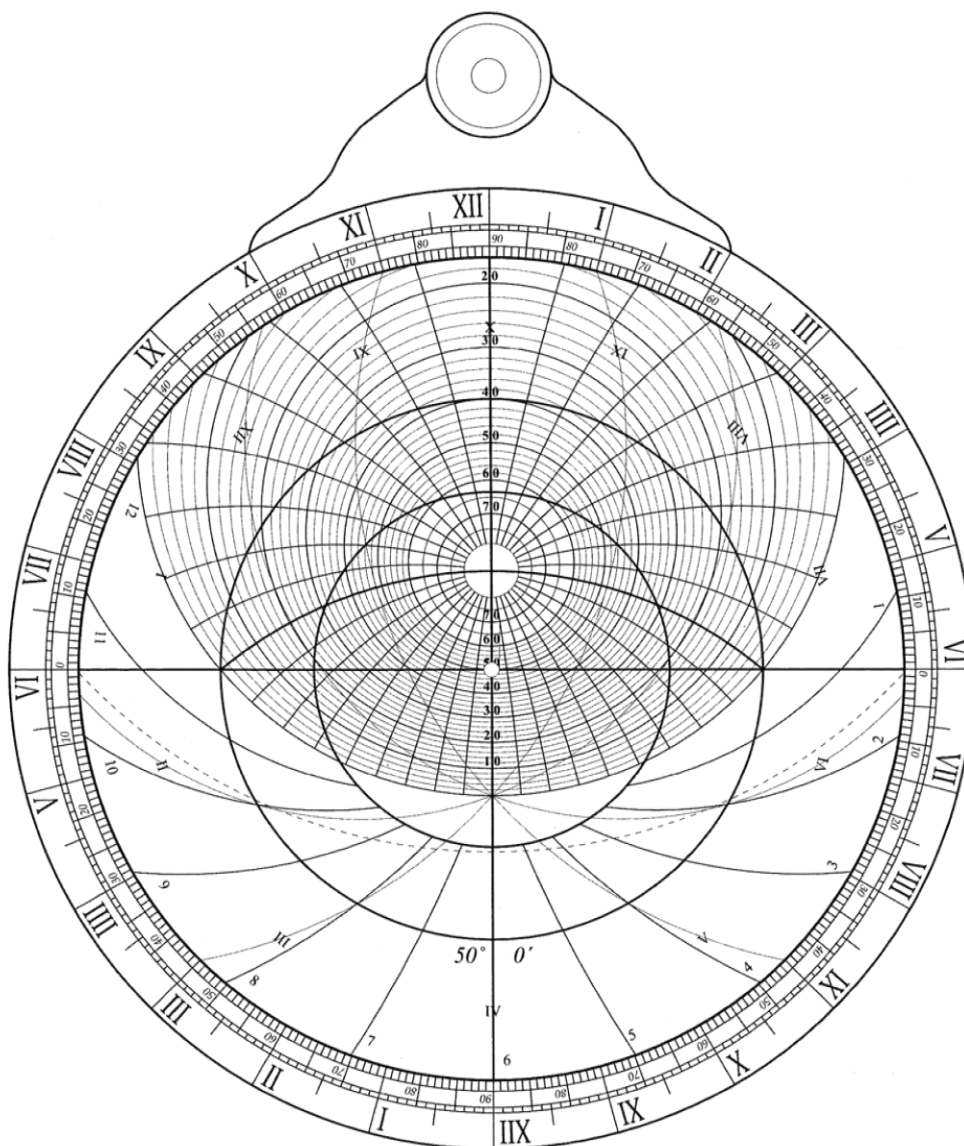


Figura 4.21 - Lâmina para uma latitude de 50°

O círculo do equador é tangente à almucântara de altura 40° , logo esta lâmina é para ser usada para uma declinação de 50° .

Numa lâmina de um astrolábio também podemos encontrar os Azimutes. Por definição, um azimuth é um círculo máximo que passa pelo Zénite e pelo Nadir (ponto da esfera que fica oposto ao Zénite).

Como círculos projectam-se estereograficamente como círculos e todos os azimutes têm dois pontos em comum (zénite e nadir), todos os centros dos azimutes estão equidistantes tanto do zénite como do nadir, ou seja, pertencem à mediatriz do segmento de recta definido por estes dois pontos.

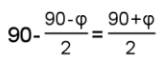


Figura 4.23 - $Y_z = R \tan\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)$; $Y_n = -R \tan\left(\frac{90+\varphi}{2}\right)$.

Se Y_c representar a distância entre r e o ponto O então $Y_c = \frac{Y_z + Y_n}{2}$ o que vai dar um valor negativo.

Se Y_{az} for a distância entre r e Z (figura 4.22), então: $Y_{az} = Y_z - Y_c = \frac{Y_z - Y_n}{2} \log o$, desenvolvendo obtém-se:

$$\begin{aligned} Y_{az} &= \frac{R \tan\left(\frac{90-\varphi}{2}\right) - R \tan\left(\frac{90+\varphi}{2}\right)}{2} = \frac{R \tan\left(\frac{90-\varphi}{2}\right) + R \tan\left(\frac{90+\varphi}{2}\right)}{2} = \\ &= \frac{R \frac{1-\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + R \frac{1+\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}{2} = \frac{R \frac{\left[1-\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2}{1-\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + R \frac{\left[1+\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2}{1-\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}{2} = \\ &= \frac{R}{2} \times \frac{1 - 2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1 + 2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \\ &= \frac{R}{2} \times \frac{2 + 2 \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = R \times \frac{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = R \frac{1}{\cos\left(2 \times \frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= \frac{R}{\cos(\varphi)} \end{aligned}$$

Finalmente, considerando ainda a figura 4.22, o ponto X é o centro do azimuth que se pode obter do seguinte modo:

$$X = Y \tan(90 - \alpha)$$

Temos ainda:

$$R_a = \frac{Y \tan(90 - \alpha)}{\cos(90 - \alpha)}$$

Quando se fazem os cálculos para determinar as linhas dos azimutes, torna-se apenas necessário fazê-los para apenas um quarto dos azimutes. Cada arco desenhado representa dois azimutes: o do ângulo φ e $180^\circ + \varphi$. Considerando o meridiano como eixo de simetria fica automaticamente definido outros dois azimutes: o do ângulo $180^\circ - \varphi$ e $-\varphi$.

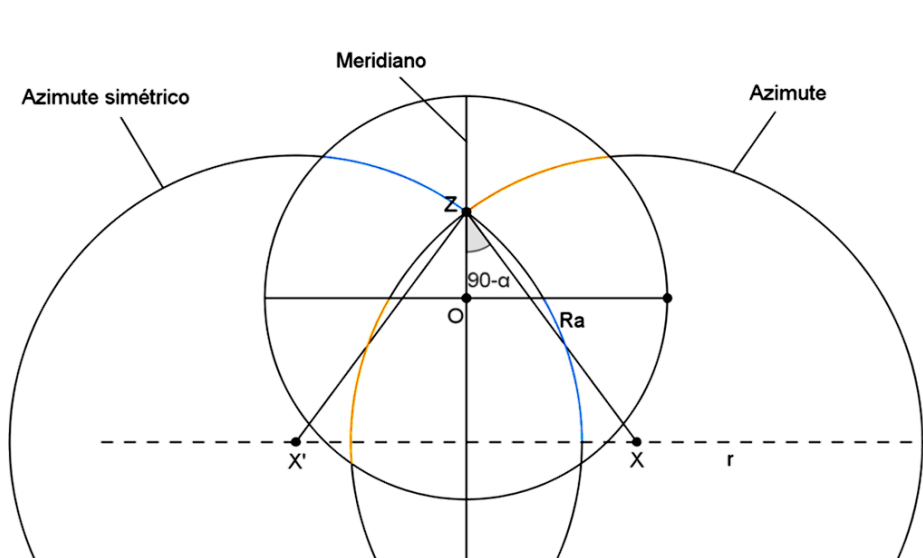


Figura 4.24 - Meridiano como eixo de simetria dos azimutes

4.2. Os Ternos Pitagóricos de Euclides

Existe uma relação surpreendente e inesperada entre a projectão estereográfica e os ternos pitagóricos gerados pela fórmula de Euclides. Para descobrir de que forma estes dois conceitos se relacionam entre si é necessário fazer uma adaptação à projectão estereográfica que conhecemos.

A projectão estereográfica está definida como uma aplicação de \mathbb{R}^3 para \mathbb{R}^2 porque a um ponto da esfera corresponde a um ponto do plano da projectão, ou seja, como já foi descrito com a projectão estereográfica é possível projectar uma esfera, à excepção de um ponto, no plano.

Vamos redefinir projectão estereográfica para o caso particular em que se projecta um ponto de uma circunferência num ponto da recta real. Neste caso, a projectão estereográfica consiste numa aplicação de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} .

Assim, em vez de uma esfera temos uma circunferência que é uma figura plana e o plano da projectão dá lugar a uma recta. Considere-se uma circunferência centrada na origem de raio um e tome-se o eixo das abcissas como a recta onde se projectam os pontos da circunferência. O ponto de coordenadas $(0,1)$ é a origem da projectão, chamemos-lhe P , e se A for um ponto da circunferência, então a projectão de A é o ponto onde a recta PA intersecta o eixo das abcissas.

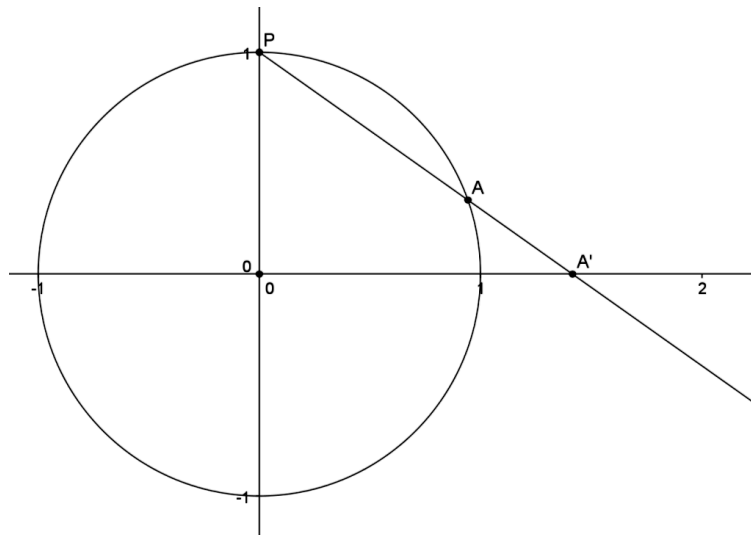


Figura 4.25 - Projectão estereográfica de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} .

Proposição

Considere-se uma circunferência de raio 1 e de centro na origem do referencial. Tome-se o ponto $P(0, 1)$ para origem da projecção e o eixo das abcissas $y = 0$ para a recta da projecção. Sejam $M(a, b)$ as coordenadas de um ponto da circunferência e $N(A, 0)$ as coordenadas da projecção estereográfica do ponto M , então:

$$(1) A = \frac{a}{1-b}$$

$$(2) (a, b) = \left(\frac{2A}{A+1}, \frac{A-1}{A+1} \right)$$

Demonstração:

(1) Seja $M(a, b)$ um ponto da circunferência de centro na origem e raio 1 e $P(0, 1)$ a origem da projecção. Queremos determinar o ponto de intersecção da recta PA com o eixo das abcissas, chamemos-lhe N e como tem ordenada nula, as suas coordenadas serão da forma $(A, 0)$.

A recta PA tem a seguinte equação vectorial:

$$PM = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (0, 1) + \mu(a, b - 1)\}$$

As equações paramétricas de PM são as seguintes:

$$\begin{cases} x = \mu a \\ y = 1 + \mu(b - 1) \end{cases}$$

Como $N \in PM$ vem:

$$\begin{cases} A = \mu a \\ 0 = 1 + \mu(b - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{1-b} \\ \mu = -\frac{1}{b-1} \end{cases}$$

Assim, $A = \frac{a}{1-b}$ como queríamos demonstrar.

(2) Começemos por determinar a equação reduzida ($y = mx + b$) da recta PN .

A recta PN passa no ponto $(0, 1)$, logo a ordenada na origem é 1, ou seja, $b = 1$.

O declive $m = \frac{0-1}{A-0} = -\frac{1}{A}$.

Assim, PN tem de equação $y = -\frac{x}{A} + 1$

O ponto $M \in PN$ logo $b = -\frac{a}{A} + 1$.

Como M pertence à circunferência então $a^2 + b^2 = 1$.

Resolvendo o sistema de equações vem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = -\frac{a}{A} + 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \left(-\frac{a}{A} + 1\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \left(-\frac{a}{A}\right)^2 - \frac{2a}{A} + 1 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Aa^2 + a^2 - 2Aa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A+1)a^2 - 2Aa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa^2 + a^2 - 2Aa = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a[(A+1)a - 2A] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \vee b = -\frac{2}{A+1} + 1 = \frac{A-1}{A+1} \\ a = 0 \vee a = \frac{2A}{A+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, o ponto M terá as seguintes coordenadas: $\left(\frac{2A}{A+1}, \frac{A-1}{A+1}\right)$ como queríamos demonstrar.

c.q.d

No que respeita aos ternos pitagóricos, no seu livro “Elementos”, Euclides mostrou que se m e n forem dois números naturais e $m > n$ então, se $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$, então os números a, b e c são ternos pitagóricos.

Por exemplo, se $m = 2$ e $n = 1$ vem $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. $3^2 + 4^2 = 5^2$, logo a, b e c são ternos pitagóricos.

A projectão estereográfica definida anteriormente produz ternos pitagóricos do seguinte modo: se $\left(\frac{m}{n}, 0\right)$ for um número racional do eixo das abcissas então o ponto da circunferência unitária de coordenadas $\left(\frac{2mn}{n^2+m^2}, \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)$ projecta-se no ponto $\left(\frac{m}{n}, 0\right)$, ou seja, a inversa da projectão estereográfica gera os ternos pitagóricos.

Para provar que esta afirmação é verdadeira comecemos por verificar que o ponto $\left(\frac{2mn}{n^2+m^2}, \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)$ pertence a uma circunferência de centro na origem e raio 1.

Assim:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2mn}{n^2+m^2}\right)^2 + \left(\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)^2 &= \frac{4m^2n^2}{(n^2+m^2)^2} + \frac{n^4-2n^2m^2+m^4}{(n^2+m^2)^2} = \\ &= \frac{4m^2n^2+n^4-2n^2m^2+m^4}{(n^2+m^2)^2} = \frac{n^4+2n^2m^2+m^4}{(n^2+m^2)^2} = \frac{(n^2+m^2)^2}{(n^2+m^2)^2} = 1 \end{aligned}$$

Resta provar que a projecção estereográfica do ponto $\left(\frac{2mn}{n^2+m^2}, \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)$ é o ponto $\left(\frac{m}{n}, 0\right)$.

Recorrendo à propriedade sabemos que $A = \frac{a}{1-b}$, logo substituindo obtemos:

$$A = \frac{\frac{2mn}{n^2+m^2}}{1 - \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}} = \frac{\frac{2mn}{n^2+m^2}}{\frac{n^2+m^2-n^2+m^2}{n^2+m^2}} = \frac{2mn}{2m^2} = \frac{m}{2}$$

c.q.d.

4.3. Geometria Inversiva

A geometria inversiva utiliza uma transformação geométrica denominada por inversão. Uma inversão transforma no plano, pontos no interior de um círculo em pontos no seu exterior e vice-versa. Pode-se pensar que uma inversão é uma reflexão em relação a um círculo dado, ou seja, em vez de se usar uma recta para fazer a reflexão, utiliza-se um círculo.

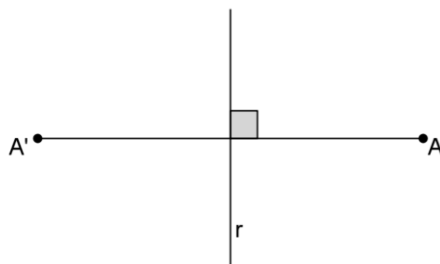


Figura 4.26 – Reflexão do ponto A em relação à recta r

Na figura 4.26, o ponto A reflecte-se em torno da recta r no ponto A' porque A e A' estão à mesma distância da recta r . O que se pretende fazer é generalizar esta ideia de reflexão e substituir a recta r por um círculo C.

Assim, vamos considerar uma recta m , paralela a $[AA']$ e que intersecte a recta r no ponto P.

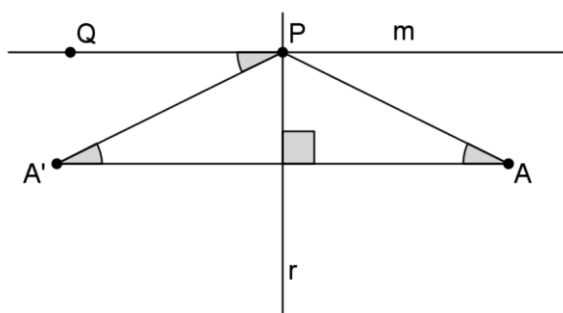


Figura 4.27 - $m \parallel [AA']$; $\widehat{PAA'} = \widehat{PQA'} = \widehat{A'AP}$

Os ângulos $\widehat{PAA'}$ e $\widehat{PQA'}$ são iguais pelas propriedades das reflexões e, como a recta m é paralela a $[AA']$ os ângulos $\widehat{PQA'}$ e $\widehat{PAA'}$ vão ser iguais e consequentemente os ângulos $\widehat{PQA'}$ e $\widehat{A'AP}$ também vão ser iguais. Estas igualdades são o ponto-chave para se fazer a generalização pretendida.

Podemos considerar então, que a recta r faz parte de um círculo C de raio infinito e que, como $m \perp r$, m vai passar pelo centro do círculo C. Se colocarmos agora a recta r

sobre um círculo C de raio finito de modo a que a recta m passe pelo raio do círculo e o intersecte no ponto P então, por analogia com a reflexão, podemos definir a imagem de A o ponto A' pertencente ao segmento $[OA]$ e com $\widehat{OPA'} = \widehat{PAO}$. Assim dizemos que A' é o ponto inverso de A em relação ao círculo C .

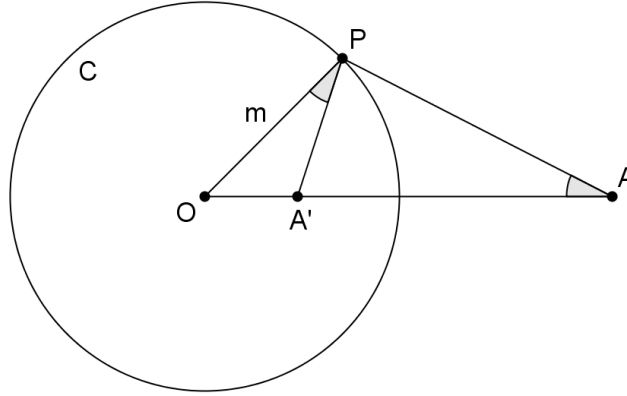


Figura 4.28 - A' é o ponto inverso de A em relação ao círculo C

Para que esta definição funcione temos de garantir que dado um ponto A , a posição de A' é independente do ponto P . Para isso, basta observar que os triângulos $[POA]$ e $[POA']$ são semelhantes uma vez que o ângulo POA é comum aos dois triângulos e os ângulos OPA' e PAO são iguais. Assim,

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$$

$$\text{logo } \overline{OA'} \times \overline{OA} = \overline{OP}^2.$$

Mas, \overline{OP} é o raio do círculo, ou seja, $\overline{OA'} \times \overline{OA} = r^2$.

Como só existe um único ponto A' no segmento $[OA]$ que satisfaz a equação $\overline{OA'} \times \overline{OA} = r^2$ e como esta equação não depende de P , podemos concluir que a posição de A' não depende do ponto P .

Apesar de ainda não sabermos como determinar o ponto A' vamos definir formalmente inversão.

Definição

Seja C um círculo com centro em O e raio r e seja A um ponto qualquer diferente de O . Se A' for um ponto do segmento $[OA]$ e satisfizer a condição

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = r^2,$$

então dizemos que o ponto A' é o *inverso* do ponto A em relação ao círculo C . O ponto O chama-se *centro da inversão* e C é o *círculo da inversão*. À transformação t definida por

$$t(A) = A', A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$$

chama-se *inversão em C* .

Note-se que se $\overline{OA} \times \overline{OA'} = r^2$ for não nulo, nem $\overline{OA'}$ nem \overline{OA} podem ser zero então, nem o ponto A nem o ponto A' podem coincidir com O . Daí ter-se excluído o ponto O da definição de inversão.

Apresentam-se de seguida algumas propriedades da inversão:

- Se o ponto A estiver dentro do círculo de raio r e centro O , então o inverso de A é o ponto A' que fica fora do círculo. Se A está dentro do círculo então $\overline{OA} < r$ logo $\overline{OA'} = \frac{r^2}{\overline{OA}} > r$

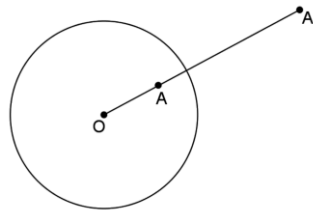


Figura 4.29 – O ponto A está dentro do círculo

- Se o ponto A estiver fora do círculo de raio r e centro O , então o inverso de A é o ponto A' que fica dentro do círculo. Se A está fora do círculo então $\overline{OA} > r$ logo $\overline{OA'} = \frac{r^2}{\overline{OA}} < r$.

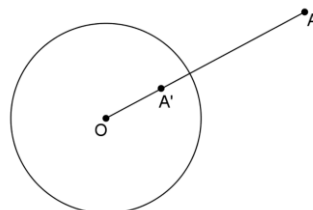


Figura 4.30 – O ponto A está fora do círculo

- Se o ponto A estiver inscrito na circunferência de raio r e centro O então o inverso do ponto A é o próprio ponto A.
- Se o ponto A for o inverso de A' então A' também é o inverso de A.

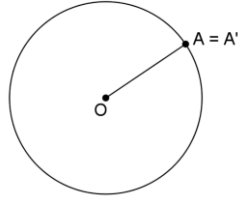


Figura 4.31 - O ponto A está inscrito na circunferência

De seguida vai-se indicar um método geométrico para construir o inverso de um ponto dado um círculo.

Seja A um ponto fora de um círculo C de centro em O e raio r , sejam AP e AQ duas rectas tangentes a C que passam pelo ponto A e seja A' o ponto de intersecção do segmento [OA] com o segmento [PQ]. Então os pontos A e A' são inversos um do outro.

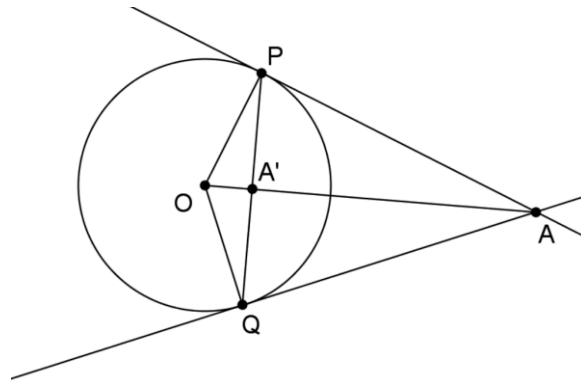


Figura 4.32 - Construção geométrica da inversão do ponto A

Nos triângulos [OPA'] e [OPA], o ângulo POA é comum a ambos e os ângulos OA'P e OPA são iguais porque são ângulos rectos. Logo estes dois triângulos são semelhantes porque têm os três ângulos iguais.

Assim,

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}},$$

logo, $\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OP}^2 = r^2$ que era o pretendido, ou seja, A e A' são inversos em relação a C.

A projecção estereográfica está relacionada com a geometria inversiva. Vamos considerar uma esfera centrada na origem O . Consideremos o plano da projecção o plano definido pelo equador. Seja P um ponto da esfera e P' a projecção estereográfica de P considerando o pólo norte (N) como a origem da projecção. Consideremos também P'' a projecção estereográfica de P mas considerando agora o pólo sul (S) como a origem da projecção.

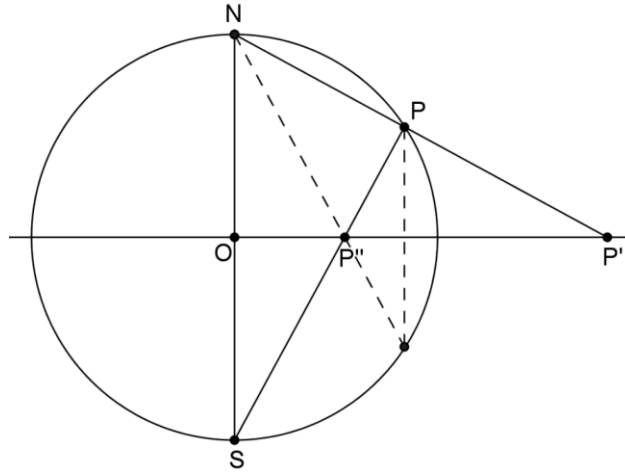


Figura 4.33 - P' é inverso de P'' em relação ao equador

Nas condições anteriores podemos afirmar que P' é inverso de P'' em relação ao equador. Basta reparar que os triângulos $[NOP']$ e $[SOP'']$ são semelhantes e

$$\frac{\overline{OP''}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP'}} \Leftrightarrow \overline{OP'} \times \overline{OP''} = \overline{ON} \times \overline{OS} = r^2$$

Podemos concluir que a projecção estereográfica fornece outro método geométrico para se fazer inversões.

4.4. Projectão Estereográfica em Cristalografia

A projectão estereográfica é usada em Mineralogia para estudar as propriedades geométricas dos cristais, ou seja, as simetrias do poliedro e as relações angulares existentes entre as faces do cristal. É também possível fazer, com a ajuda da projectão estereográfica, desenhos de perspectiva do cristal.

Para se perceber como a projectão estereográfica está relacionada com a cristalografia é necessário definir previamente alguns conceitos relativos à cristalografia.

Os minerais apresentam uma simetria bem definida que faz com que estes possam ser divididos e agrupados em diferentes classes. Há vários movimentos que se podem fazer com o cristal de modo a fazê-lo coincidir com a sua posição inicial. Estes movimentos denominam-se por operações de simetrias e podem ser da seguinte forma:

- Rotação em torno de um eixo;
- Reflexão sobre um plano;
- Rotação em torno de um eixo seguida de uma inversão rotatória.

Um *plano de simetria* é um plano imaginário que divide o cristal em duas metades simétricas, ou seja, uma das partes é o espelho da outra.

Um *eixo de simetria de rotação* é uma recta imaginária que atravessa o cristal de modo a que este possa girar à sua volta e repita a sua aparência original pelo menos duas vezes durante uma rotação de 360° .

O *centro de simetria* de um cristal é um ponto, no interior do cristal, em que qualquer recta que passe por ele intersecta a superfície do cristal em dois pontos que estão à mesma distância desse ponto (o centro de simetria).

Um *eixo de simetria de inversão rotatória* é uma rotação em torno de um eixo seguida de uma inversão através do centro.

O eixo, o plano, o eixo de inversão rotatória e o centro são os *elementos de simetria*.

Uma *zona* é um conjunto de faces do cristal que as suas arestas de intersecção são paralelas entre si.

O *eixo da zona* é uma recta que passa pelo centro do cristal e é paralela as arestas de intersecção das faces.

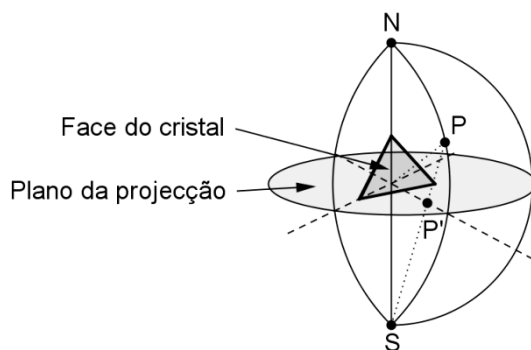


Figura 4.35 – P é o pólo esférico e P' é o pólo estereográfico da face representada

Os pólos esféricos das faces que pertencem à mesma zona estão situados num círculo máximo da esfera denominado por *círculo de zona*. As faces perpendiculares ao plano da projecção têm os seus pólos esféricos inscritos no equador da esfera. Os pólos esféricos das faces paralelas ao plano da projecção são projectados no centro do equador. Os pólos esféricos das faces oblíquas ao plano da projecção projectam-se no interior do equador.

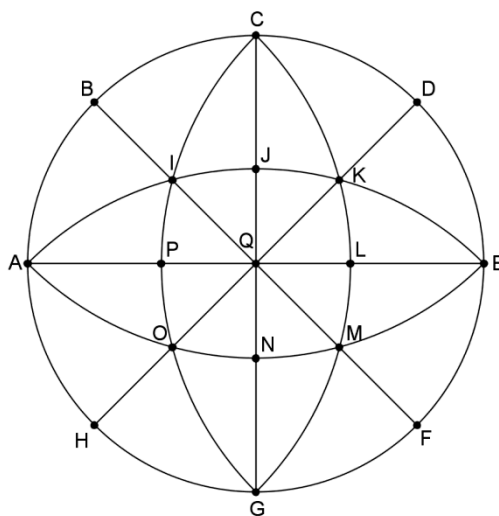


Figura 4.36 – Estereograma do cristal representado na figura 4.34

Na figura 4.36, os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são pólos estereográficos de faces perpendiculares ao plano da projecção e pertencem todos à mesma zona. Os pontos H, O, Q, K e D são pólos estereográficos de faces oblíquas em relação ao plano da projecção e pertencem à mesma zona. O ponto Q é o pólo estereográfico de uma face paralela ao plano da projecção.

Observando ainda a figura 4.36, consegue-se perceber a simetria que o cristal apresenta.

5. Bibliografia

THOMSON, Ron B., *Jordanus de Nemore and the Mathematics of Astrolabe: De Plana Spera*, Toronto, Pontifical Institute of Mediaval Studies, 1978.

MORRISON, James E., *The Astrolabe*, USA, Janus, 2007.

JOHN, Locke, *Understanding the Astrolabe*, First Edition, Brabourne Books, 2003.

TARDY, Jean-Noël, *Astrolabes, Cartes du ciel les comprendre et les construire*, Aix-en-Provence, Édisud, 1999.

HURLBUT, Dana, *Manual de Mineralogia*, Volume 1, Tradução: Rui Ribeiro Franco, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S. A., 1970.

BRANNAN, David A.; ESPLEN, Matthew F.; GRAY, Jeremy J.; *Geometry*, UK, Cambridge University Press, 2004.

CARVALHO, A. M. Galopim, *Cristalografia e Mineralogia*, Universidade Aberta, Lisboa, 1997.

COTTER, Charles H., *The Elements of Navigation and Nautical Astronomy*, Brown, Son & Ferguson Ltd, Glasgow, 1992.

VELOSO, Eduardo; *Algumas noções elementares de astronomia*; Série: Descobrimentos, Astronomia e Educação Matemática Nº1; 1ª Edição; APM; 1991.

JAMIESON, Laura; MONTERO, Maria; *Stereographic Projection, Chaucer and the Astrolabe*.

<http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/montero/math309project.html>.

AUGHTON, Peter; *The Story of Astronomy from Babylonian stargazers to the search for the big bang*, Quercus, 2008.

EUCLIDES; *Os elementos/Euclides*; Tradução e introdução de Irineu Bicudo; São Paulo, Editora UNESP, 2009.

LAFFORGUE, Laurent; *L'invisible en mathématiques*, Nanterre, jeudi 12 mars 2009.

WIKIPEDIA, the free encyclopedia; *Stereographic projection*.

http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

SHUTRIC, Hubert; *Stereographic Projection and Radical Axes*.

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/StereographicProjection.shtml>

BOGOMOLNY, Alexander; *Stereographic Projection and Inversion*.

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/StereoProAndInversion.shtml>.

WIKIPEDIA, the free encyclopedia; *Inversive geometry*.

http://en.wikipedia.org/wiki/Inversive_geometry, Fevereiro de 2009.

STOTHERS Wilson, *Geometry Pages*.

<http://www.maths.gla.ac.uk/~wws/cabripages/inversive/inversive0.html>.

APÊNDICE

FICHAS DE TRABALHO

3º CÍCLO DO ENSINO BÁSICO E ENSINO SECUNDÁRIO

FICHA DE TRABALHO

Projecção Estereográfica de um ponto

Enquadramento curricular

- 10º Ano do ensino secundário;

Pré-requisitos

- Coordenadas cartesianas no espaço;
- Equação da esfera;
- Equação do plano;
- Equação vectorial da recta no espaço;
- Equação paramétrica da recta no espaço;
- Equação cartesiana da recta no espaço;
- Resolução de equações do 2º grau.
- Resolução de sistemas de equações

Organização

- Trabalho a pares ou individual;
- Duração de uma hora;
- Trinta minutos para correcção e discussão de resultados.

Material necessário

- Papel e lápis

FICHA DE TRABALHO

Projecção Estereográfica de um ponto

PARTE I

1. Escreva a equação da esfera de centro na origem do e raio 1.
2. Verifique que os pontos $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $S(0, 0, -1)$ pertencem à esfera definida na alínea anterior.
3. Determine a equação vectorial e cartesiana da recta SP.
4. Escreva a equação do plano xOy .
5. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta SP com o plano xOy .
6. Considere agora o ponto $Q(a, b, c)$ pertencente à esfera de centro na origem e raio 1. Determine a equação vectorial e cartesiana da recta SQ.
7. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta SQ com o plano $z = 0$.
8. Utilizando o resultado da alínea anterior, determine a projecção estereográfica dos pontos $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

PARTE II

1. Justifique que o ponto $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ pertence ao plano $z = 0$.
2. Considere o ponto $S(0, 0, -1)$. Determine a equação vectorial e cartesiana da recta SM.
3. Determine o ponto de intersecção da recta SM com a esfera de centro na origem e raio 1.

4. Considere o ponto $X(A, B, 0)$ pertencente ao plano xOy . Mostre que o ponto $Y(a, b, c)$ que resulta da intersecção da recta SX com a esfera de centro na origem e raio 1 é da forma:

$$(a, b, c) = \left(\frac{2A}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{2B}{A^2 + B^2 + 1}, \frac{A^2 + B^2 - 1}{A^2 + B^2 + 1} \right)$$

Notas para o professor:

- Os alunos só deverão responder ao ponto 8 da primeira parte depois do professor explicar em que consiste a projecção estereográfica e referir que o ponto S é a origem da projecção e o plano $z = 0$ é o plano da projecção.
- O professor deverá também referir que o ponto pedido na questão número 5 é a projecção estereográfica do ponto P .
- Em relação à questão número 7, o professor deverá salientar que o resultado obtido é a fórmula geral para se determinar a projecção estereográfica de um ponto qualquer da esfera.

FICHA DE TRABALHO

Projecção Estereográfica – conservação dos círculos

Enquadramento curricular

- 9º Ano do ensino básico;

Pré-requisitos

- Semelhança de triângulos;
- Ângulos inscritos numa circunferência;

Organização

- Trabalho a pares ou individual;
- Duração 30 minutos;
- 20 minutos para correcção e discussão de resultados.

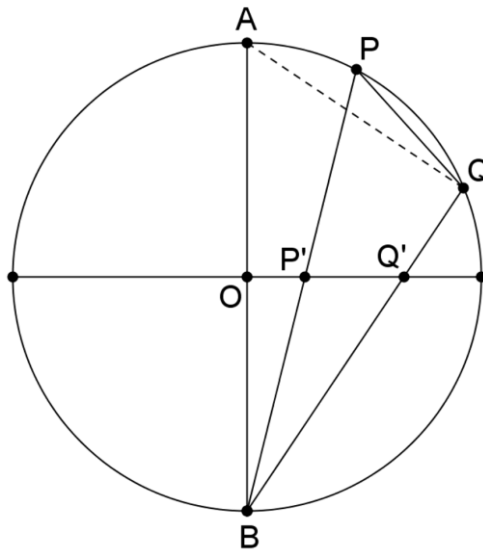
Material necessário

- Papel e lápis.

FICHA DE TRABALHO

Projecção Estereográfica – conservação dos círculos

1. Observe a seguinte figura que representa uma circunferência de centro em O e raio [OA]:



Temos:

- $AB \perp P'Q'$;
- [AB] é um diâmetro do círculo;

Prove que $\widehat{BPQ} = \widehat{BQ'P'}$ e que $\widehat{BQP} = \widehat{BP'Q'}$.

Como sugestão, siga as seguintes etapas:

1. Considere os triângulos [BAQ] e [BPQ] e prove que $\widehat{BAQ} = \widehat{BPQ}$;
2. Justifique que os triângulos [BAQ] e [BOQ'] são ambos rectângulos;
3. Mostre que os triângulos [BAQ] e [BOQ'] são semelhantes;
4. Justifique que $\widehat{BPQ} = \widehat{BQ'P'}$;
5. Justifique que os triângulos [BPQ] e [BP'Q'] são semelhantes;
6. Conclua que $\widehat{BQP} = \widehat{BP'Q'}$.

Notas para o professor:

- Este é um bom exercício de preparação para exame nacional. O exame engloba toda a matéria do terceiro ciclo e esta actividade relaciona conceitos matemáticos que são trabalhados em diferentes anos, nomeadamente a semelhança de triângulos e a geometria da circunferência.
- Esta actividade consiste na demonstração de que a projecção estereográfica projecta círculos de uma superfície esférica em círculos no plano. A demonstração desta propriedade da projecção estereográfica recorre às propriedades das secções cónicas que afirma existirem duas formas de seccionar um cone oblíquo de modo a originar um círculo. A referência, por parte do professor, a esta propriedade da projecção estereográfica é facultativa pois exige, da parte dos alunos, uma abstracção a que os alunos do 9º ano do ensino básico não estão habituados.

FICHA DE TRABALHO

Projecção Estereográfica – aplicação à mineralogia

Enquadramento curricular

- 11º Ano do ensino básico;

Pré-requisitos

- Vectores;
- Equação da recta no espaço;
- Equação do plano no espaço;
- Resolução de sistemas de equações.

Organização

- Trabalho a pares ou individual;
- Duração 60 minutos;
- 30 minutos para correcção e discussão de resultados.

Material necessário

- Papel e lápis.
- Máquina de calcular.

FICHA DE TRABALHO

Projecção Estereográfica – aplicação à mineralogia

1. Considere um octaedro definido pelos seguintes vértices:

$$A\left(0, 0, \frac{1}{2}\right); B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right); C\left(0, \frac{1}{2}, 0\right); D\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right); E\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right); F\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Represente-os num referencial cartesiano de \mathbb{R}^3 .

2. Escreva a equação da esfera de centro na origem e raio 1.
3. Determine um vector perpendicular a cada uma das faces do octaedro.
4. Para cada face do octaedro, determine a equação da recta perpendicular à respectiva face e que passe pela origem do referencial.
5. Determine os pontos de intersecção das rectas que escreveu na questão 4 com a esfera de centro na origem e raio 1.
6. Escreva a equação das rectas que passam pelo ponto $(0, 0, -1)$ e pelos pontos obtidos na questão 5.
7. Determine os pontos de intersecção das rectas obtidas em 6 com o plano $z = 0$.
8. Marque os pontos obtidos em 7 num referencial cartesiano de \mathbb{R}^2 .

Notas para o professor:

- Antes de fornecer esta tarefa aos alunos, o professor deverá fazer uma pequena introdução onde explique o que é a projecção estereográfica e como esta é importante para o estudo dos cristais em cristalografia.

A título de exemplo deverá utilizar o cubo centrado na origem para exemplificar o processo utilizado em mineralogia para estudar a simetria dos cristais. O cubo tem a vantagem de os pontos resultantes, quer da projecção esférica quer da projecção estereográfica, serem determinados sem recorrer a qualquer cálculo.

- Esta tarefa exige muitos cálculos pelo que os alunos poderão trabalhar em grupo e dividir as tarefas.